В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

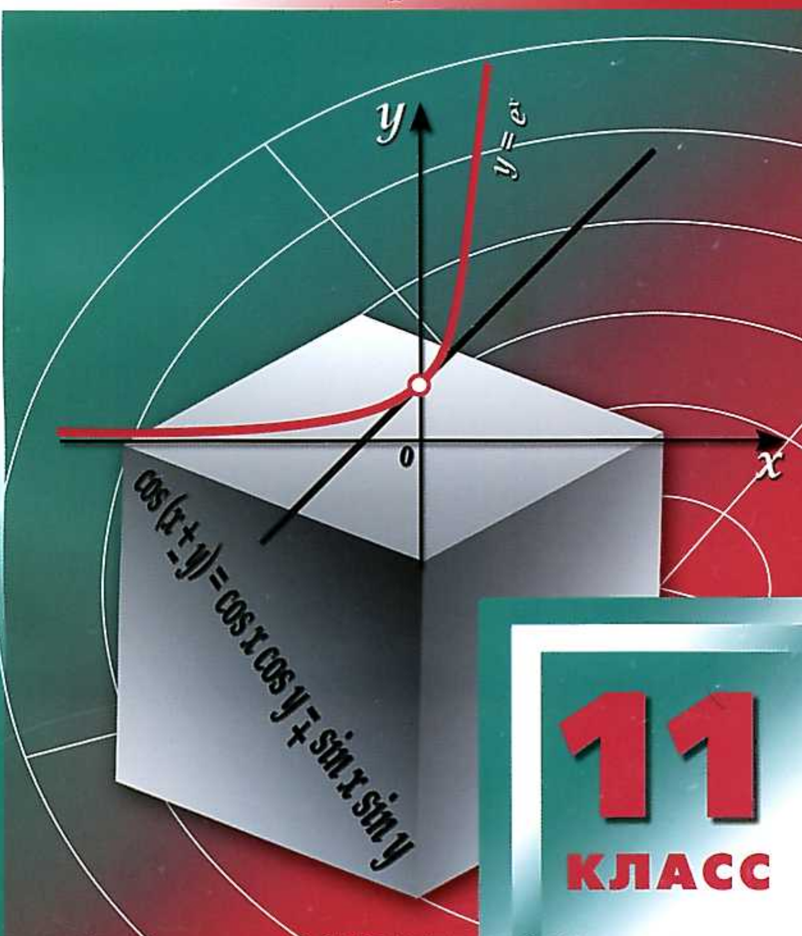
А.Н. Рурукин, И.А. Масленникова, Т.Г. Мишина

# ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

*по*

## АЛГЕБРЕ *и* НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

К УМК А.Г. *Мордковича*




**11 КЛАСС**

**В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ**

А. Н. РУРУКИН
И. А. МАСЛЕННИКОВА
Т. Г. МИШИНА

# ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

**к УМК**
***А.Г. Мордковича и др.***
*(М.: Мнемозина)*

# 11 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2011

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21
Р87

**Рурукин А.Н., Масленникова И.А., Мишина Т.Г.**
Р87 Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 11 класс. – М.: ВАКО, 2011. – 304 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-00447-8

Пособие представляет собой подробные поурочные разработки по алгебре и началам математического анализа для 11 класса к УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина) и содержит весь необходимый педагогу материал для качественной подготовки к урокам: детальные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, тесты, подробный разбор контрольных и зачетных работ. Предлагаемый материал достаточен для проведения полноценных уроков в классах и группах различного уровня, позволяет не только глубоко изучить программу 11 класса по предмету, но и целенаправленно и эффективно подготовить учащихся к сдаче ЕГЭ.

Издание будет полезно как начинающим педагогам, так и преподавателям с опытом работы.

УДК 337:167.1:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-00447-8

# Предисловие

В 11 классе продолжается изучение нового раздела математики – **начал математического анализа**. Этот раздел характеризуется своеобразными логикой, подходами, методикой. Поэтому очень важно сразу заложить четкое и грамотное понимание основ высшей математики. Помимо подготовки к экзамену, такое понимание будет способствовать усвоению высшей математики в вузе (напомним, что в вузах математический анализ изучается 2 года). Также в 11 классе рассматриваются **элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей.** Кроме того, в этом классе продолжается изучение **алгебры** – детально рассматриваются степенные, показательные, логарифмические функции, уравнения и неравенства.

11 класс необходимо рассматривать как **целенаправленную подготовку к сдаче ЕГЭ**, так как варианты этого экзамена содержат значительное количество задач, содержащих изучаемый материал.

Цели данного пособия: изучить материал по алгебре и началам математического анализа, подготовиться по этим разделам к успешной сдаче ЕГЭ и быть готовым использовать полученные знания при обучении в вузе. Пособие составлено для УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина). Нумерация задач в поурочных планах соответствует задачнику этого УМК.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: более детально рассмотрены типы иррациональных, показательных и логарифмических уравнений, систем уравнений, неравенств; изучены и систематизированы способы интегрирования функций; более широко представлено применение интегралов в математике и физике. Изложение материала вполне доступно для одиннадцатиклассников, развивает их интерес к изучению предмета и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к успешной сдаче ЕГЭ и дальнейшему эффективному обучению в вузе.

Предусмотрены следующие виды фронтального контроля успеваемости: самостоятельные работы, письменные опросы, тесты, контрольные работы, зачетные работы.

Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор степени сложности определяется учителем или учеником. При этом за решение более сложной контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом к оценке. В контрольной работе всегда на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора для учащихся.

Зачетные работы приведены для коррекции результатов контрольных работ. Задачи работы разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Необходимое для получения оценки количество баллов может быть набрано из разных блоков. Даже для получения высшей оценки необходимо решить не более половины задач варианта. Поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора задач.

В конце обучения проводится итоговая контрольная работа, в которой проверяются навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Все контрольные и зачетные работы приведены с ответами, для наиболее сложных задач дано их полное решение. Ответы и разбор задач могут быть использованы для размещения на стенде, так как разобрать все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время. Приведены подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания. Предлагаемый материал достаточен для проведения уроков в классах и группах различного уровня, позволяет не только глубоко изучить программу 11 класса по предмету, но и целенаправленно подготовить учащихся к сдаче ЕГЭ.

# Рекомендации к проведению уроков

Разумеется, все изложенное носит **исключительно рекомендательный характер**. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. На наш взгляд, пусть каждый школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не поймет ничего. В последнем случае ситуация принимает лавинообразный характер: у учащихся возникает комплекс неполноценности, к выполнению домашнего задания привлекаются все домочадцы, начинается списывание, подсказки, шпаргалки и т. д. В итоге результаты ужасающие – ЕГЭ по математике сдается школьниками хуже всех других предметов (примерно 20% выпускников пишут его на двойку).

Другая причина, по которой нельзя создать универсальное пособие, – наличие нескольких различных вариантов обучения (с соответствующим тематическим планированием и различным количеством часов на обучение). При этом некоторые варианты обучения предусматривают использование дополнительных учебных пособий.

В связи с этим данное пособие позволяет проводить занятия с использованием только одного базового учебника (82 ч в год). Содержание уроков является избыточным (в расчете на очень сильный, подготовленный класс). При необходимости часть материала опускается либо излагается достаточно поверхностно. При подробном, детальном изложении материала его вполне хватает на максимальный вариант. Учитывая сложность материала, проведение контрольных работ и тематических зачетов, желательно иметь в расписании сдвоенные уроки математики.

Поурочное планирование включает в себя **четыре вида занятий**:

1. Урок изучения нового материала.
2. Урок отработки и закрепления пройденного материала.
3. Контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

1. **Урок изучения нового материала** включает в себя семь этапов.

I. **Сообщение темы и цели** занятий делает учитель (~1÷2 мин). Необходимо донести до учащихся необходимость изучения данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены в ходе проведения урока).

II. **Изучение нового материала** (основные понятия) (~15 мин) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая, что многие понятия для учащихся незнакомы, такой путь можно рекомендовать лишь для самых простых тем либо отдельных фрагментов урока.

2. Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. **Контрольные вопросы** по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~5 мин). Вопросы можно задавать как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется кроме определения попросить учащегося привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие школьники или учитель.

IV. **Задание на уроке** дает учитель из числа наиболее характерных, типовых задач (~15 мин). Задание может выполняться:

1. Самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся (поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.).

2. В виде диалога учащихся за одной партой (решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения).

3. В виде работы у доски одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможны как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется, при этом будет происходить и диалог учителя с отвечающим у доски.

V. **Задание на дом** дается учителем из числа типовых, характерных задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 60–80 мин. Если возможно, то желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить школьников фиксировать непонятый материал: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся при обучении в вузе. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии по математике.

VI. Во многих уроках предусмотрены **творческие задания**. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или большей сложностью, или нестандартностью формулировки, задания или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);

2) со всеми учащимися как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками или на уроке, или в виде домашнего задания;

4) во время проведения математических боев, олимпиад, недель математики и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах отведенного времени на урок.

VII. **Подведение итогов урока** (~1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

2. **Урок на отработку и закрепление пройденного материала** отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрено повторение и закрепление пройденного материала (~20 мин). Прежде всего, оно включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давались самими учащимися класса. Вопросы могут включать в себя непонятые понятия, определения, термины и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет и необходимость разбора нерешенных задач.

В этой части урока желательна максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более удобными для понимания ровесниками, чем объяснения учителя. Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~ 5–10 мин.

На второй стадии этого этапа предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~ 10–15 мин.

**Письменный опрос** содержит теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на его понимание, а не на строгость и четкость формулировок (тем более что строгие формулировки некоторых понятий будут даны только в вузе).

**Самостоятельная работа** включает 2–3 типовые характерные задачи.

В материалах уроков **тесты** используются в небольшом количестве для наиболее простых тем. Это связано с тем, что тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, невнимательность, пробелы в предыдущем материале, арифметические ошибки и т. д.

3. По каждой изучаемой теме приводятся **контрольные работы**. Они составлены в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, 5, 6 – самые сложные). Вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи вариантов подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оценка контрольной работы может быть выполнена следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность их заданий).

Контрольная работа рассчитана на два урока (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы). Изучаемый в 11 классе материал достаточно сложен. Предлагаемые задачи требуют раздумья и времени. Поэтому одного урока на проведение контрольной работы недостаточно. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке контрольная работа может быть проведена и за один урок.

После каждой контрольной работы проводятся ее анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задания вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

4. Чтобы устранить подобную необъективность, дать возможность повышения оценок у учащихся, еще раз повторить и закрепить пройденную тему, на последнем занятии проводится письменный тематический зачет. Ему предшествует урок на повторение данной темы.

**Тематический зачет** предложен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три группы (группа А – самые простые задачи, группа В – более сложные задачи и группа С – самые сложные задачи). Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценку «3» ставят за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

# Тематическое планирование учебного материала

## I полугодие (48 ч)

**Глава 6. Степени и корни. Степенные функции (15 ч)**

Понятие корня $n$-й степени из действительного числа (2 ч)
Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики (2 ч)
Свойства корня $n$-й степени (2 ч)
Преобразование выражений, содержащих радикалы (3 ч)
Контрольная работа № 1 (1 ч)
Обобщение понятия о показателе степени (2 ч)
Степенные функции, их свойства и графики (3 ч)

**Глава 7. Показательная и логарифмическая функции (24 ч)**

Показательная функция, ее свойства и график (3 ч)
Показательные уравнения и неравенства (3 ч)
Контрольная работа № 2 (1 ч)
Понятие логарифма (1 ч)
Функция $y = \log_a x$, ее свойства и график (2 ч)
Свойства логарифмов (2 ч)
Логарифмические уравнения (3 ч)
Контрольная работа № 3 (1 ч)
Логарифмические неравенства (3 ч)
Переход к новому основанию логарифма (2 ч)
Дифференцирование показательной и логарифмической функций (2 ч)
Контрольная работа № 4 (1 ч)

**Глава 8. Первообразная и интеграл (9 ч)**

Первообразная (3 ч)
Определенный интеграл (3 ч)
Контрольная работа № 5 (1 ч)
Резервные уроки (2 ч)

## II полугодие (34 ч)

**Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей (11 ч)**

Статистическая обработка данных (2 ч)
Простейшие вероятностные задачи (2 ч)
Сочетания и размещения (2 ч)

**Формула бинома Ньютона (2 ч)**
**Случайные события и их вероятности (2 ч)**
**Контрольная работа № 6 (1 ч)**

**Глава 10. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств (17 ч)**
**Равносильность уравнений (2 ч)**
**Общие методы решения уравнений (3 ч)**
**Решение неравенств с одной переменной (3 ч)**
**Уравнения и неравенства с двумя переменными (1 ч)**
**Системы уравнений (3 ч)**
**Уравнения и неравенства с параметрами (3 ч)**
**Контрольная работа № 7 (2 ч)**

**Повторение (6 ч)**

# Поурочные разработки
# I полугодие

# Глава 6. Степени и корни. Степенные функции

## Уроки 1–2. Понятие корня *n*-й степени из действительного числа

***Цель***: рассмотреть корень *n*-й степени из числа.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Изучение нового материала**

Сначала необходимо обсудить с учащимися **понятие квадратного корня из числа *a*:** это такое **число, квадрат которого равен числу *a***. Другими словами, $x$ – квадратный корень из числа $a$, если выполнено равенство $x^2 = a$.

Предложите ученикам по аналогии ввести понятие корня *n*-й степени из числа $a$. Обобщение совершенно очевидно: **корнем *n*-й степени из числа *a* называется такое число *x*, *n*-я степень которого равна *a***. Другими словами, $x$ – решение уравнения $x^n = a$.

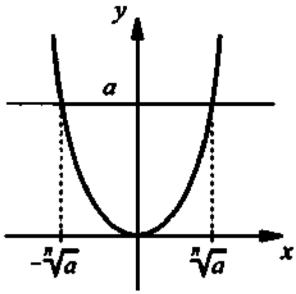
***Пример 1***

а) Число 4 является корнем уравнения $x^3 = 64$, т. к. выполнено равенство $4^3 = 64$.

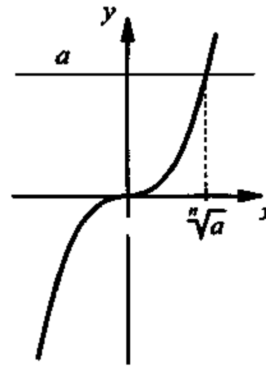
б) Числа 2 и −2 являются корнями уравнения $x^4 = 16$, т. к. выполнены равенства: $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$.

Вообще, при рассмотрении уравнения $x^n = a$, как правило, получаем решения, которые являются **иррациональными числами**. Такое решение обозначают символом $\sqrt[n]{a}$ (читают: корень *n*-й степени из числа $a$). Например, решением уравнения $x^3 = 2$ является иррациональное число, которое обозначают символом $\sqrt[3]{2} \approx 1,25$.

При решении уравнения $x^n = a$ (где $a > 0,\ n \in N,\ n \geq 2$) получаем в случае четного $n$ два корня: $x_1 = -\sqrt[n]{a}$ и $x_2 = \sqrt[n]{a}$; в случае нечетного $n$ – один корень $x = \sqrt[n]{a}$. Это проиллюстрировано рисунком, на котором приведен график функции $y = x^n$ и приведено решение уравнения $x^n = a$.




$n$ – четное




$n$ – нечетное

Приведем теперь строгое определение корня.

**Определение 1. Корнем $n$-й степени ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) из неотрицательного числа $a$ называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень получают число $a$.** Таким образом, если $a \geq 0$ и $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a} \geq 0$ и 2) $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Приняты термины: $\sqrt[n]{a}$ – корень $n$-й степени из числа $a$, число $a$ – подкоренное число, число $n$ – показатель корня.

Для наиболее часто встречающихся корней приняты специальные названия: при $n = 2$ говорят «квадратный корень» и обозначают символом $\sqrt{a}$, при $n = 3$ говорят «кубический корень» и обозначают символом $\sqrt[3]{a}$.

Вообще, зависимости $\sqrt[n]{a} = b$ и $b^n = a$ обозначают одну и ту же связь между неотрицательными числами $a$ и $b$. Операцию нахождения корня называют **извлечением корня**. Такая операция является обратной по отношению к операции возведения в соответствующую степень, что видно из данных таблицы.

| Возведение в степень | Извлечение корня |
|---|---|
| $4^3 = 64$ | $\sqrt[3]{64} = 4$ |
| $0{,}5^4 = 0{,}0625$ | $\sqrt[4]{0{,}0625} = 0{,}5$ |
| $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$ | $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$ |
| $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$ | $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$ |

***Пример 2***

Используя определение, вычислим:

а) $\sqrt[3]{125}=5$, так как $125\geq 0$, $5\geq 0$ и $5^3=125$;

б) $\sqrt[4]{0,0081}=0,3$, так как $0,0081\geq 0$, $0,3\geq 0$ и $0,3^4=0,0081$;

в) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}}=\dfrac{4}{5}$, так как $\dfrac{64}{125}\geq 0$, $\dfrac{4}{5}\geq 0$ и $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{125}$;

г) $\sqrt[4]{7\dfrac{58}{81}}=\sqrt[4]{\dfrac{625}{81}}=\dfrac{5}{3}$, так как $\dfrac{625}{81}\geq 0$, $\dfrac{5}{3}\geq 0$ и $\left(\dfrac{5}{3}\right)^4=\dfrac{625}{81}$;

д) $\sqrt[9]{0}=0$, так как $0\geq 0$ и $0^9=0$.

Операцию извлечения корня можно ввести и **для отрицательного числа *a***, но только в случае **нечетного показателя *n*** корня. Например, равенство $(-4)^3=-64$ можно записать в виде $\sqrt[3]{-64}=-4$. Для этого случая определение корня аналогично уже приведенному.

**Определение 2. Корнем нечетной степени *n*** ($n=3, 5, 7, \ldots$) **из отрицательного числа *a* называют такое отрицательное число, при возведении которого в степень *n* получают число *a*.** Таким образом, если $a<0$ и $n=3, 5, 7, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a}<0$ и 2) $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

***Пример 3***

Используя определение, вычислим:

а) $\sqrt[5]{-32}=-2$, так как $-32<0$, $-2<0$ и $(-2)^5=-32$;

б) $\sqrt[3]{-0,125}=-0,5$, так как $-0,125<0$, $-0,5<0$ и $(-0,5)^3=-0,125$;

в) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}=-\dfrac{2}{3}$, так как $-\dfrac{8}{27}<0$, $-\dfrac{2}{3}<0$ и $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3=-\dfrac{8}{27}$.

Таким образом, корень четной степени имеет смысл (т. е. определен) только для неотрицательных подкоренных чисел; корень нечетной степени имеет смысл для любых подкоренных чисел.

В заключение остановимся на решении простейших иррациональных уравнений и неравенств.

***Пример 4***

Решим уравнение:

а) $\sqrt[4]{3x+7}=-1$. Корень четной степени – число неотрицательное и не может равняться числу $-1$. Поэтому данное уравнение решений не имеет.

б) $\sqrt[4]{5x-14}=1$. Обе части уравнения – неотрицательные выражение и число. Поэтому обе части возведем в четвертую степень и получим линейное уравнение $5x-14=1$ или $5x=15$, корень которого

$x = 3$. Итак, данное иррациональное уравнение имеет единственное решение $x = 3$.

в) $\sqrt[3]{3x+10} = -2$. Уравнение содержит корень нечетной степени. Возведем в куб обе части и получим линейное уравнение $3x + 10 = -8$ или $3x = -18$, корень которого $x = -6$. Таким образом, данное уравнение имеет единственное решение $x = -6$.

г) $\sqrt{11-x} = x+1$. Левая часть уравнения – неотрицательное выражение, т. к. является квадратным корнем. Поэтому правая часть также должна быть неотрицательным выражением, т. е. $x + 1 \geq 0$ (откуда $x \geq -1$). Возведем в квадрат обе части данного уравнения $11 - x = (x + 1)^2$. При этом очевидно, что подкоренное выражение $11 - x \geq 0$, т. к. $(x + 1)^2 \geq 0$. Получим квадратное уравнение $11 - x = x^2 + 2x + 1$ или $0 = x^2 + 3x - 10$. Его корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -5$. Однако условию $x \geq -1$ удовлетворяет только значение $x = 2$. Поэтому корень $x = -5$ посторонний. Итак, данное иррациональное уравнение имеет единственное решение $x = 2$.

***Пример 5***

Решим неравенство:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{2x-3}{4-x}} > -2$. Левая часть неравенства – неотрицательное выражение, правая часть – отрицательное число. Поэтому неравенство выполнено для всех значений $x$ из ОДЗ неравенства. Решим неравенство $\dfrac{2x-3}{4-x} \geq 0$, например, методом интервалов. Получаем $x \in [1,5;\ 4)$. Этот промежуток является решением данного иррационального неравенства.

б) $\sqrt{x^2+3x} \geq 2$. Левая часть неравенства – неотрицательное выражение, правая часть – положительное число. Поэтому возведем обе части неравенства в квадрат: $x^2 + 3x \geq 4$. При этом подкоренное выражение положительно. Решим полученное квадратное неравенство $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ и получим: $x \in (-\infty;\ -4] \cup [1;\ +\infty)$.

в) $\sqrt{x^2+8x} < 3$. ОДЗ неравенства задается условием $x^2 + 8x \geq 0$. Решение этого неравенства $x \in (-\infty;\ -8] \cup [0;\ +\infty)$. Обе неотрицательные части неравенства $\sqrt{x^2+8x} < 3$ возведем в квадрат. Получаем квадратное неравенство $x^2 + 8x < 9$ или $x^2 + 8x - 9 < 0$. Его решение $x \in (-9;\ 1)$. С учетом ОДЗ находим решение данного иррационального неравенства: $x \in (-9;\ -8] \cup [0;\ 1)$.

г) $\sqrt{x+3} > 3-x$. ОДЗ неравенства определяется условием $x + 3 \geq 0$, откуда $x \in [-3; +\infty)$. При таких значениях $x$ правая часть данного неравенства может быть и отрицательной, и положительной.

Рассмотрим эти случаи.

1) При $3 - x < 0$ (т. е. $x > 3$) правая часть отрицательна, левая – неотрицательна. Получаем верное неравенство. Поэтому промежуток $x \in (3; +\infty)$ – решение данного неравенства.

2) При $3 - x \geq 0$ (т. е. $x \leq 3$) обе части неравенства неотрицательны. Возведем их в квадрат. Получаем: $x + 3 > (3 - x)^2$ или $0 > x^2 - 7x + 6$. Решение этого квадратного неравенства – промежуток $x \in (1; 6)$. С учетом ограничения $x \leq 3$ находим, что промежуток $x \in (1; 3]$ – решение данного неравенства.

Объединяя решения рассмотренных двух случаев, окончательно найдем решение данного иррационального неравенства: $x \in (1; +\infty)$.

**III. Контрольные вопросы**

1. Определение корня $n$-й степени из неотрицательного числа.
2. Корень нечетной степени из отрицательного числа.

**IV. Задание на уроках**

§ 33 № 1 (а, б); 2 (в, г); 3 (а, в); 4 (а, б); 9 (а, в); 11 (а, б); 12 (в, г); 14 (а, б); 15 (а, г); 16 (б, в); 17 (а, б); 18 (в).

**V. Задание на дом**

§ 33 № 1 (в, г); 2 (а, б); 3 (б, г); 4 (в, г); 9 (б, г); 11 (в, г); 12 (а, б); 14 (в, г); 15 (б, в); 16 (а, г); 17 (в, г); 18 (а).

**VI. Подведение итогов уроков**

## Уроки 3–4. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

***Цель***: рассмотреть свойства и графики функций $y = \sqrt[n]{x}$.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Определение корня $n$-й степени из неотрицательного числа.
2. Решите уравнение (неравенство):

а) $\sqrt{3x+1} = x+1$;

б) $\sqrt{x^2-2x+1} = 1-x$;

в) $\sqrt{\dfrac{3x+1}{x-1}} \geq 2$.

**Вариант 2**

1. Определение корня нечетной степени из отрицательного числа.
2. Решите уравнение (неравенство):

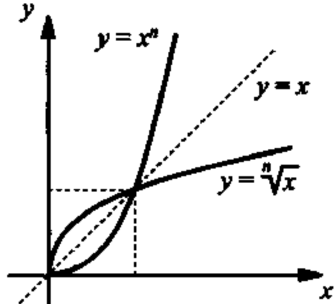
а) $\sqrt{8x+1} = 2x+1$;

б) $\sqrt{x^2-4x+4} = 2-x$;

в) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}} \geq 2$.

**III. Изучение нового материала**

Сначала обсудим свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ для неотрицательных значений аргумента. Степенная функция $y = x^n$ при $x \in [0; +\infty)$ монотонна. Поэтому такая функция обратима. Найдем обратную функцию. Из равенства $y = x^n$ выразим переменную $x$ и получим $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяем переменные $x$ и $y$ местами и получим функцию $y = \sqrt[n]{x}$, обратную для функции $y = x^n$. Поэтому график функции $y = \sqrt[n]{x}$ симметричен графику функции $y = x^n$ относительно прямой $y = x$ для $x \geq 0$.




Перечислим основные **свойства** функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$:

1) область определения $D(f) = [0; +\infty)$.
2) функция не является ни четной, ни нечетной;
3) функция возрастает на $[0; +\infty)$;

4) функция ограничена снизу и не ограничена сверху;

5) наименьшее значение функции $y_{наим} = 0$ при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет;

6) функция непрерывна;

7) область значений $E(f) = [0; +\infty)$;

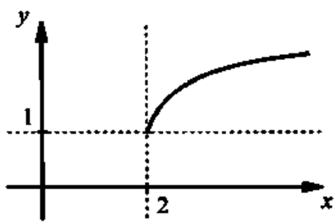
8) функция выпукла вверх;

9) функция дифференцируема (имеет производную) в любой точке $x > 0$ и не имеет производной в точке $x = 0$.

***Пример 1***

Построим график функции $y = \sqrt[4]{x-2}+1$.

Построим вспомогательную систему координат с началом в точке (2; 1) и осями – прямыми $y = 1$ и $x = 2$. В этой новой системе координат построим график функции $y = \sqrt[4]{x}$.

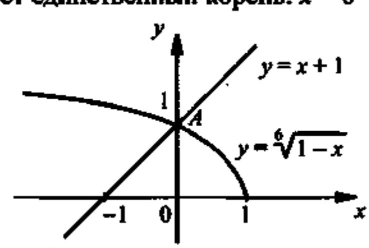



Можно было также сместить график функции $y = \sqrt[4]{x}$ на две единицы вправо и на одну единицу вверх.

***Пример 2***

Решим уравнение $\sqrt[6]{1-x} = x+1$.

В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt[6]{1-x}$ и $y = x + 1$. Видно, что графики функций пересекаются в единственной точке $A(0; 1)$. Проверка показывает, что эта точка принадлежит и графику функции $y = \sqrt[6]{1-x}$, и графику функции $y = x + 1$. Тогда данное уравнение имеет единственный корень: $x = 0$ – абсцисса точки $A$.

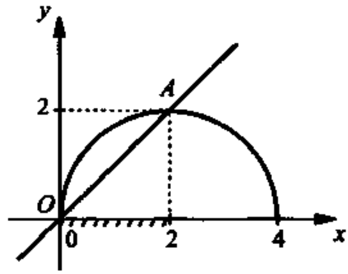



Графический способ решения подсказывает и аналитическое решение. Легко проверить, что $x = 0$ – корень данного уравнения. При этом функция $y = x + 1$ возрастает, а функция $y = \sqrt[6]{1-x}$ убывает. Тогда данное уравнение имеет только один корень.

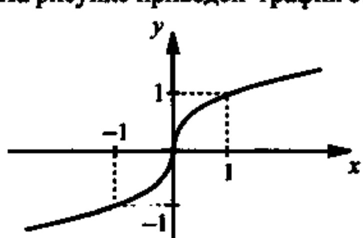
***Пример 3***

Решим неравенство $\sqrt{4x - x^2} \geq x$.

Сначала построим график функции $y = \sqrt{4x - x^2}$. Очевидно, что $y \geq 0$. Возведем обе части равенства в квадрат: $y^2 = 4x - x^2$ – и приведем его к виду $(x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4$ или $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$. Видно, что графиком функции $y = \sqrt{4x - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса 2 с центром в точке (2; 0). Графиком функции $y = x$ является биссектриса I и III координатных углов. Видно, что графики функций пересекаются в точках $O(0; 0)$ и $A(2; 2)$ и данное неравенство выполняется на промежутке $x \in [0; 2]$.




Остановимся теперь на свойствах функции $y = \sqrt[n]{x}$ в случае **нечетного значения $n$ и любых значений аргумента $x$**. Очевидно, что такая функция является нечетной. Действительно, получаем: $y(-x) = \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x} = -y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, то функция $y = \sqrt[n]{x}$ нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. На рисунке приведен график этой функции.




Перечислим основные **свойства** функции $y = \sqrt[n]{x}$ для нечетного **значения $n$**:

1) область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат;

3) функция возрастает на $(-\infty; +\infty)$;

4) функция не ограничена;

5) функция наименьшего и наибольшего значения не имеет;

6) функция непрерывна;

7) область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

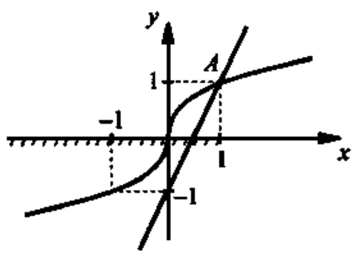
8) функция выпукла вниз на промежутке $(-\infty; 0]$ и выпукла вверх на промежутке $[0; +\infty)$;

9) функция дифференцируема (имеет производную) в любой точке $x \neq 0$ и не имеет производной в точке $x = 0$.

***Пример 4***

Решим неравенство $\sqrt[3]{x} \geq 2x - 1$.

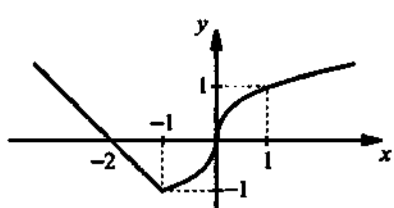
В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = 2x - 1$. Графики функций пересекаются в единственной точке $A(1; 1)$, и данное неравенство выполняется на промежутке $x \in (-\infty; 1]$.




***Пример 5***

Построим и прочитаем график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, \text{ если } x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \geq -1. \end{cases}$$




Сначала построим график функции $y = -x - 2$ на промежутке $(-\infty; -1)$. Затем строим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ на промежутке $[-1; +\infty)$. С учетом построенного графика перечислим основные свойства функций:

1) область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) функция не является ни четной, ни нечетной;

3) функция убывает на $(-\infty; 1]$ и возрастает на $[-1; +\infty)$;

4) функция ограничена снизу и не ограничена сверху;

5) наименьшее значение функции $y_{наим} = -1$ при $x = -1$, наибольшего значения функция не имеет;

6) функция непрерывна;

7) область значений $E(f) = [-1; +\infty)$;

8) функция выпукла вниз на промежутке $[-1; 0]$ и выпукла вверх на промежутке $[0; +\infty)$;

9) функция дифференцируема (имеет производную) в любой точке $x$, кроме $x = -1$ и $x = 0$. Не имеет производной в точках $x = -1$ и $x = 0$.

***Пример 6***

Найдем область определения и область значений функции:

а) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 9}$; б) $f(x) = 2\sqrt[3]{x-3}$; в) $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + 4\sqrt{x^2+5}$.

а) Область определения функции задается условием $4x^2 - 9 \geq 0$. Решение этого неравенства $D(f) = (-\infty; -1,5] \cup [1,5; +\infty)$. В этих промежутках функция принимает значения $E(f) = [0; +\infty)$.

б) Функция определена при всех значениях $x$, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. При этом сама функция также принимает все значения, т. е. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

в) Область определения функции задается условиями $x - 2 \geq 0$ и $x^2 + 5 \geq 0$. Решение этой системы неравенств $D(f) = [2; +\infty)$. В этом промежутке функции $x - 2 \geq 0$ и $x^2 + 5$ возрастающие. При этом $x - 2 \geq 0$ и $x^2 + 5 \geq 9$, тогда $\sqrt[4]{x^2-2} \geq 0$, $\sqrt{x^2+5} \geq 3$ и $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + 4\sqrt{x^2+5} \geq$ $\geq 4 \cdot 3 = 12$. Поэтому область значений данной функции $E(f) = [12; +\infty)$.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Приведите свойства и график функции $y = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$.

2. Перечислите свойства и приведите график функции $y = \sqrt[n]{x}$ для нечетных $n$.

**V. Задание на уроках**

§ 34, № 1 (а, б); 3 (а); 4 (а, б); 5 (в, г); 6; 8 (а, б); 10 (в, г); 12; 14 (а, б); 15 (а); 16 (в); 17 (а, б); 18 (в); 19 (а, б); 21 (а); 22 (б).

**VI. Задание на дом**

§ 34, № 1 (в, г); 3 (в); 4 (в, г); 5 (а, б); 7; 8 (в, г); 10 (а, б); 13; 14 (в, г); 15 (б); 16 (г); 17 (в, г); 18 (а); 19 (в, г); 21 (б); 22 (а).

**VII. Подведение итогов уроков**

# Уроки 5–6. Свойства корня *n*-й степени

***Цель***: обсудить основные свойства корней и их применение к решению задач.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt[4]{3-2x-x^2}$;

б) $f(x)=\sqrt{3-2x}-\sqrt[6]{9-x^2}$.

2. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[4]{x-2}+1$;

б) $y=\sqrt{2x-x^2}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}}$.

**Вариант 2**

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt[6]{5-4x-x^2}$;

б) $f(x)=\sqrt{1+2x}-\sqrt[4]{4-x^2}$.

2. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[4]{x+3}-2$;

б) $y=\sqrt{4x-x^2}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}}$.

### III. Изучение нового материала

Для вычисления иррациональных выражений необходимо знать **свойства корней *n*-й степени** и уметь ими пользоваться.

**Теорема 1.** Корень *n*-й степени ($n$ = 2, 3, 4, ...) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней *n*-й степени из этих чисел, т. е. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

Докажем это утверждение. Для удобства введем обозначения: $\sqrt[n]{ab}=x$, $\sqrt[n]{a}=y$ и $\sqrt[n]{b}=z$. Надо доказать, что для неотрицательных чисел $x$, $y$, $z$ выполнено равенство $x=y\cdot z$. При введенных обозначениях имеем: $ab=x^n, a=y^n, b=z^n$, тогда $x^n=y^n\cdot z^n$ или $x^n=(y\cdot z)^n$, откуда $x=y\cdot z$. Это и требовалось доказать.

***Пример 1***

Вычислим: $\sqrt[3]{27\cdot 64}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}=3\cdot 4=12.$

Разумеется, приведенную формулу можно применять слева направо и справа налево.

***Пример 2***

Вычислим: $\sqrt[4]{108}\cdot\sqrt[4]{192}=\sqrt[4]{3^3\cdot 4}\cdot\sqrt[4]{3\cdot 4^3}=\sqrt[4]{3^3\cdot 4\cdot 3\cdot 4^3}=\sqrt[4]{3^4\cdot 4^4}=$
$=\sqrt[4]{(3\cdot 4)^4}=3\cdot 4=12.$

**Теорема 2.** Корень $n$-й степени из отношения неотрицательного числа $a$ и положительного числа $b$ равен отношению корней $n$-й степени из этих чисел, т. е. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Докажем такое утверждение. Пусть $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=x$, $\sqrt[n]{a}=y$ и $\sqrt[n]{b}=z$.

Надо доказать, что для неотрицательных чисел $x$ и $y$ и положительного числа $z$ выполнено равенство $x=\dfrac{y}{z}$. При введенных обозначениях получаем: $\dfrac{a}{b}=x^n$, $a=y^n$, $b=z^n$, тогда $x^n=\dfrac{y^n}{z^n}$ или $x^n=\left(\dfrac{y}{z}\right)^n$, откуда $x=\dfrac{y}{z}$. Таким образом, утверждение доказано.

***Пример 3***

Вычислим: $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{3}{2}=1,5.$

***Пример 4***

Найдем: $\dfrac{\sqrt[4]{405}}{\sqrt[4]{80}}=\sqrt[4]{\dfrac{405}{80}}=\sqrt[4]{\dfrac{5\cdot 81}{5\cdot 16}}=\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\dfrac{3}{2}=1,5.$

***Пример 5***

Вычислим $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}}$.

Прежде всего обратим смешанное число $7\frac{19}{32}$ в неправильную дробь: $7\frac{19}{32}=\frac{7\cdot 32+19}{32}=\frac{224+19}{32}=\frac{243}{32}$. Теперь, используя теорему 2, найдем: $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{3}{2}=1{,}5.$

Разумеется, теоремы 1 и 2 являются обобщениями аналогичных свойств квадратных корней (8 класс). Рассмотрим теперь другие свойства радикалов.

**Теорема 3.** Чтобы возвести корень $n$-й степени из неотрицательного числа $a$ в натуральную степень $k$, надо в эту степень возвести подкоренное выражение, т. е. $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$. Очевидно, что такое утверждение является следствием теоремы 1. Действительно, получаем: $\sqrt[n]{a^k}=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{k\text{ раз}}=(\sqrt[n]{a})^k$.

***Пример 6***

Вычислим: $(\sqrt[3]{2})^6=\sqrt[3]{2^6}=\sqrt[3]{(2^2)^3}=\sqrt[3]{4^3}=4$.

**Теорема 4.** Чтобы извлечь корень $n$-й степени из корня $k$-й степени из неотрицательного числа $a$, надо извлечь корень степени $nk$ из этого числа, т. е. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$.

Докажем это утверждение. Обозначим $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=x$ и $\sqrt[nk]{a}=y$. Надо доказать, что для неотрицательных чисел $x$ и $y$ выполнено равенство $x=y$. Возведем в $n$-ю степень $x$ и получим: $x^n=\sqrt[k]{a}$. Теперь такое равенство возведем в степень $k$. Имеем: $(x^n)^k=a$ или $x^{nk}=a$. Также возведем в степень $nk$ величину $y$ и получим: $y^{nk}=a$. Очевидно, что $x^{nk}=y^{nk}$, и тогда $x=y$.

Утверждение доказано.

***Пример 7***

Упростим выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[3\cdot 2]{a}=\sqrt[6]{a}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[4\cdot 3]{a}=\sqrt[12]{a}$.

**Теорема 5.** Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится, т. е. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Обозначим $\sqrt[np]{a^{kp}} = x$ (тогда по определению корня выполнено равенство $x^{np} = a^{kp}$) и $\sqrt[n]{a^k} = y$ (тогда имеем $y^n = a^k$). Возведем в степень $p$ обе части последнего равенства: $y^{np} = a^{kp}$. Сравнивая равенства $x^{np} = a^{kp}$ и $y^{np} = a^{kp}$, получаем $x^{np} = y^{np}$, откуда $x = y$ (что и требовалось доказать).

***Пример 8***

а) $\sqrt[12]{a^{16}} = \sqrt[3]{a^4}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 4);

б) $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения умножили на 2).

***Пример 9***

Упростим выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$.

Каждый корень, входящий в выражение, представим в виде корня степени 12 (теорема 5) и учтем теорему 1. Получаем: $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^6} \cdot \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^6 \cdot a^4 \cdot a^3} = \sqrt[12]{a^{13}}$.

**IV. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)**

1. Сформулируйте (и докажите) теорему о корне из произведения чисел.
2. Сформулируйте (и докажите) теорему о корне из частного двух чисел.
3. Возведение корня из числа в натуральную степень.
4. Извлечение корня из корня числа.

**V. Задание на уроках**

§ 35, № 1 (а, г); 4 (а, б); 9 (а, г); 10 (б); 12 (а, б); 13 (б); 14 (а, в); 15 (б); 16 (а); 19 (б, в); 20 (а, б); 22 (в, г); 24 (а, г); 26 (б); 28; 30 (а, в).

**VI. Задание на дом**

§ 35, № 1 (б, в); 4 (в, г); 9 (б, в); 10 (г); 12 (б, г); 13 (а); 14 (б, г); 15 (а); 16 (б); 19 (а, г); 20 (в, г); 22 (а, б); 24 (б, в); 26 (а); 29; 30 (б, г).

**VII. Подведение итогов уроков**

# Уроки 7–8. Преобразование выражений, содержащих радикалы

***Цель***: рассмотреть свойства корней и их использование для преобразования выражений.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Корень из произведения двух чисел (с доказательством).

2. Вычислите: а) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{81}}$; б) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}$.

3. Упростите выражение $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$.

**Вариант 2**

1. Корень из частного двух чисел (с доказательством).

2. Вычислите: а) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{16}}$; б) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}$.

3. Упростите выражение $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}$.

### III. Изучение нового материала

Приведем полученные на прошлом уроке **основные свойства** корня $n$-й степени:

$(\sqrt[n]{a})^n = a$; $\sqrt[n]{a^n} = a$ (1);

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ (2);

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (3);

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$ (4);

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ (5);

$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$ (6).

Приведенные формулы используют для преобразования выражений, содержащих корни (**радикалы**). Такие выражения называют **иррациональными**. Рассмотрим наиболее типичные примеры.

***Пример 1***

Сравним числа:

а) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$. Представим данные корни в виде корней одной и той же степени, используя свойство 5. Получаем: $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$ и $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$. Так как $9>8>0$, то имеем $\sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{8}$ или $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

б) $\sqrt[n+1]{a^n}$ и $\sqrt[n]{a^{n+1}}$ (при $a>1$, $n\in N$ и $n\geq 2$). Используя свойство 5, представим данные корни в виде корней одинаковой степени. Получаем: $\sqrt[n+1]{a^n}=\sqrt[(n+1)n]{(a^n)^n}=\sqrt[(n+1)n]{a^{n^2}}$ и $\sqrt[n]{a^{n+1}}=\sqrt[n(n+1)]{(a^{n+1})^{n+1}}=\sqrt[n(n+1)]{a^{(n+1)^2}}$.

Так как $0<a^{n^2}<a^{(n+1)^2}$, то имеем $\sqrt[(n+1)n]{a^{n^2}}<\sqrt[n(n+1)]{a^{(n+1)^2}}$ или $\sqrt[n+1]{a^n}<\sqrt[n]{a^{n+1}}$.

Во многих случаях требуется выполнять операции **вынесения из-под корня и внесения под корень** некоторых выражений. В случае корней четной степени учащиеся, как правило, допускают ошибки. Еще раз напомним, что $\sqrt[n]{x^n}=|x|$, если $n$ – четное натуральное число.

***Пример 2***

а) Вынесем множитель за знак корня $\sqrt[4]{16a^6b^5}$.

Учтем ОДЗ данного выражения: $a$ – любое действительное число, $b\geq 0$. Используя свойства корней, получаем: $\sqrt[4]{16a^6b^5}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{a^6}\cdot\sqrt[4]{b^5}=$
$=2\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^4}\cdot\sqrt[4]{b}=2|a|\cdot\sqrt{|a|}\cdot|b|\cdot\sqrt[4]{b}=2|a|\cdot b\cdot\sqrt{|a|}\sqrt[4]{b}$ (учтем, что $b\geq 0$ и $|b|=b$) $=\begin{cases}2ab\sqrt{a}\sqrt[4]{b} & \text{при } a\geq 0,\\ -2ab\sqrt{-a}\sqrt[4]{b} & \text{при } a<0.\end{cases}$

б) Внесем множитель под знак корня $3ab\sqrt[6]{b}$.

ОДЗ данного выражения: $b\geq 0$ и $a$ – любое действительное число. Поэтому необходимо рассмотреть два случая:

если $a\geq 0$, то $a=|a|$ и $3ab\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{3^6}\cdot|a|\sqrt[6]{b^6}\cdot\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{720}\sqrt[6]{|a|^6\cdot b^6\cdot b}=$
$=\sqrt[6]{729a^6b^7}$;

если $a<0$, то $-a=|a|$ и $3ab\sqrt[6]{b}=-3\cdot(-a)b\sqrt[6]{b}=-3|a|b\sqrt[6]{b}=$
$=-\sqrt[6]{3^6|a|^6b^6b}=-\sqrt[6]{729a^6b^7}$.

Итак, данное выражение $3ab\sqrt[6]{b}=\begin{cases}\sqrt[6]{729a^6b^7} & \text{при } a\geq 0,\\ -\sqrt[6]{729a^6b^7} & \text{при } a<0.\end{cases}$

Понятие корня $n$-й степени необходимо и в преобразованиях выражений.

***Пример 3***

Упростим числовое выражение:

а) $3\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{32}-\sqrt{8}$;

б) $\sqrt[5]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}$;

в) $\sqrt{34-24\sqrt{2}}$.

а) Вынесем множители за знаки корней. Получаем: $3\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{32}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{4\cdot 2}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot(3+5-4-2)=2\sqrt{2}$.

б) Используем свойство произведения корней и формул разности квадратов. Имеем: $\sqrt[5]{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\sqrt[5]{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(\sqrt{7}+2\sqrt{2})}=\sqrt[5]{(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt[5]{7-8}=\sqrt[5]{-1}=-1$.

в) Предположим, что подкоренное выражение $34-24\sqrt{2}$ является квадратом разности, т. е. $34-24\sqrt{2}=(a-b\sqrt{2})^2$, где $a$ и $b$ – некоторые положительные числа. Возведем в квадрат правую часть равенства: $34-24\sqrt{2}=a^2-2ab\sqrt{2}+2b^2=(a^2+2b^2)-2ab\sqrt{2}$. Приравняем целую и иррациональную части. Получаем систему уравнений $\begin{cases}34=a^2+2b^2,\\24=2ab.\end{cases}$ Решением этой системы являются числа $a=4$ и $b=3$.

Таким образом, $34-24\sqrt{2}=(4-3\sqrt{2})^2$ и $\sqrt{34-24\sqrt{2}}=\sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}=|4-3\sqrt{2}|=-(4-3\sqrt{2})=3\sqrt{2}-4$. Было учтено, что $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ и $4-3\sqrt{2}\approx 4-3\cdot 1{,}4\approx -0{,}2<0$.

В ряде случаев полезно **избавляться от корней (иррациональности) в знаменателях дробей**. Для этого используют **формулы сокращенного умножения**.

***Пример 4***

Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

Запишем знаменатель дроби в виде $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2$. Очевидно, что такое выражение является неполным квадратом разности чисел $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{2}$. Поэтому умножим числитель и знаменатель данной дроби на сумму $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ (сопряженную величину) и учтем формулу суммы кубов. Получаем: $\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=$

$$=\frac{5(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}=\frac{5(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{5(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{3+2}=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}.$$

Этот же прием можно использовать и для решения более сложных задач.

***Пример 5***

Найдем сумму дробей $A=\dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}.$

Избавимся в сумме $A$ от иррациональности в знаменателях дробей:

$$A=\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}+\ldots+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})(\sqrt{2}-\sqrt{1})}=$$

$$=\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}+\ldots+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}=\sqrt{100}-\sqrt{99}+\sqrt{99}-\sqrt{98}+\ldots+\sqrt{2}-\sqrt{1}.$$

Так как в рассматриваемой сумме сокращаются все слагаемые, кроме первого и последнего, то она равна $A=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9.$

***Пример 6***

Упростим выражение $A=\sqrt{1-x}+\sqrt{4x^2-12x+9}+2x-3.$

Для того чтобы $A$ было определено, необходимо выполнить условия: $1-x\ge 0$, $4x^2-12x+9\ge 0$. Первое из них выполнено для $x\le 1$, второе – для всех $x$, так как $4x^2-12x+9=(2x-3)^2\ge 0.$ Тогда выражение $A$ имеет вид: $A=\sqrt{1-x}+|2x-3|+2x-3.$ Раскрывая знак абсолютной величины для $x\le 1$ (а при таких $x$ выражение $2x-3<0$), имеем: $A=\sqrt{1-x}-(2x-3)+2x-3=\sqrt{1-x}.$

Из приведенного примера видно, что в рассматриваемых выражениях успешно используются формулы сокращенного умножения. Рассмотрим еще один пример.

***Пример 7***

Упростим выражение $A=\sqrt{3x+2\sqrt{3x-5}-4}-\sqrt{12x+4\sqrt{3x-5}-19}.$

Под каждым из радикалов, входящих в $A$, находится полный квадрат суммы чисел, что, однако, является неочевидным. Чтобы убедиться в этом, введем новую переменную $y=\sqrt{3x-5}.$ Тогда $y^2=3x-5$ и $x=\dfrac{y^2+5}{3}.$

Подставив это выражение в $A$, получим: $A=\sqrt{3\cdot\frac{y^2+5}{3}+2y-4}-$

$-\sqrt{12\cdot\frac{y^2+5}{3}+4y-19}=\sqrt{y^2+2y+1}-\sqrt{4y^2+4y+1}=|y+1|-|2y+1|.$

Так как арифметический корень $y \geq 0$, то выражения $y+1$ и $2y+1$ положительны. Поэтому $A=y+1-(2y+1)=-y=-\sqrt{3x-5}$. Это выражение определено при $x \geq \frac{5}{3}$.

Заметим, что во многих случаях выражения, содержащие радикалы, с помощью простейших замен сводятся к алгебраическим рациональным выражениям.

***Пример 8***

Упростим выражение $A=\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}-\frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{2x^2-4xa}{x-a}$.

Введем очевидные замены $y=\sqrt{x}$, $z=\sqrt{a}$, тогда $x=y^2$ и $a=z^2$. Подставив $x$ и $a$ в выражение $A$, получим: $A=\frac{y^3}{y+z}-\frac{y^2z}{z-y}+\frac{2y^4-4y^2z^2}{y^2-z^2}=$

$$=\frac{y^3}{y+z}+\frac{y^2z}{y-z}+\frac{2y^4-4y^2z^2}{(y+z)(y-z)}=\frac{y^3(y-z)+y^2z(y+z)+(2y^4-4y^2z^2)}{(y+z)(y-z)}=$$

$$=\frac{3y^4-3y^2z^2}{(y+z)(y-z)}=\frac{3y^2(y^2-z^2)}{y^2-z^2}=3y^2.$$

Возвращаясь к исходным переменным $x$ и $a$, найдем $A=3x$. Это выражение $A$ определено при $x \geq 0$, $a \geq 0$, $x \neq a$.

**IV. Задание на уроках**

§ 36, № 1; 6 (а, б); 8 (в, г); 9 (а, г); 11 (а, б); 12 (г); 13 (б); 14 (в); 16 (г); 17 (а); 19 (б); 23 (г); 24 (а, б); 27 (в, г); 29 (а); 30 (б).

**V. Задание на дом**

§ 36, № 2; 6 (в, г); 8 (а, б); 9 (б, в); 11 (в, г); 12 (б); 13 (г); 14 (а); 16 (б); 17 (в); 19 (г); 23 (б); 24 (в, г); 27 (а, б); 29 (б); 30 (а).

**VI. Подведение итогов уроков**

# Уроки 9–10. Иррациональные уравнения и неравенства (факультативное занятие)

***Цель***: рассмотреть основные типы иррациональных уравнений и неравенств и способы их решения.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Сравните числа: а) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[3]{-0,5}$ и $\sqrt[5]{-0,3}$.

2. Упростите выражение $3\sqrt[5]{a^5}+2\sqrt[4]{a^4}+a$ (при $a\le 0$).

3. Решите неравенство $(x^4-2)(x^3+1)\le 0$.

**Вариант 2**

1. Сравните числа: а) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{-0,2}$ и $\sqrt[5]{-0,4}$.

2. Упростите выражение $4\sqrt[7]{a^7}-3\sqrt[6]{a^6}-5a$ (при $a\le 0$).

3. Решите неравенство $(x^6-3)(x^3+8)\le 0$.

### III. Изучение нового материала

Уравнение (неравенство), в котором **под знаком корня** содержится **переменная**, называют **иррациональным**.

***Пример 1***

а) Уравнения и неравенства $\sqrt[3]{3x-2}=4$; $\sqrt{x-3}\le 2$; $\sqrt[3]{x+2}-$ $-\sqrt[5]{x+1}=1$; $\sqrt[4]{x+3}+3x\ge 5-x$ являются иррациональными, т. к. под знаком радикала находится переменная.

б) Уравнения и неравенства: $3\sqrt{2}-\sqrt{3}x^2+5\sqrt{7}x-2=0$; $\sqrt[5]{4}-2\sqrt[3]{6}x+$ $+x^2\cdot\sqrt[7]{2}\le 0$; $(\sqrt[3]{9}-2)x=\sqrt[5]{7}-1$; $(\sqrt[3]{5}-\sqrt{3})x\le\sqrt[3]{2\sqrt{3}-1}$ не являются иррациональными, т. к. переменная не находится под знаком корня. Отметим, что под знаками корня содержатся какие-то числа. При этом первое уравнение и второе неравенство являются квадратными. Третье уравнение и четвертое неравенство являются линейными.

Введем два важнейших понятия, полезных при решении иррациональных уравнений и неравенств. Первое из них – **область допустимых значений** (ОДЗ) – вам уже знакомо. **ОДЗ** называется **множество значений переменной**, при которых **уравнение или неравенство имеет смысл**. В рассматриваемой теме ОДЗ, как правило, определяется возможностью извлечения корня четной степени из выражений.

***Пример 2***

ОДЗ уравнения $\sqrt{3x-2}-\sqrt[4]{9-x^2}=5$ задается неравенствами $\begin{cases}3x-2\ge 0,\\ 9-x^2\ge 0,\end{cases}$ решение которых $\begin{cases}x\ge\dfrac{2}{3},\\ -3\le x\le 3,\end{cases}$ откуда $x\in\left[\dfrac{2}{3};3\right]$. Этот промежуток является ОДЗ данного уравнения.

В ряде случаев нахождения ОДЗ позволяет решить уравнение или неравенство.

***Пример 3***

Решим неравенство $2\sqrt[4]{x^2-5x+4}+\sqrt{-x^2+6x-8}\ge 1-\sqrt[3]{3x-4}$.

ОДЗ данного неравенства задается условиями $\begin{cases}x^2-5x+4\ge 0,\\ -x^2+6x-8\ge 0.\end{cases}$

Решение этих неравенств $\begin{cases}x\in(-\infty;1]\cup[4;\infty),\\ x\in[2;4],\end{cases}$ откуда $x=4$. Видно, что ОДЗ неравенства состоит из одной точки $x = 4$. Проверим, является ли это число решением данного неравенства. Подставим его в неравенство и получим: $2\sqrt[4]{0}+\sqrt{0}\ge 1-\sqrt[3]{12-4}$ или $0\ge -1$. Получили верное неравенство. Поэтому решение данного неравенства – число $x=4$.

Другим важным понятием при решении является область существования решений (ОСР), т. е. множество значений переменной, при которых решение уравнения или неравенства возможно.

***Пример 4***

Рассмотрим уравнение $\sqrt[6]{3x^3-2x^4+5x+1}=x-2$.

В левой части уравнения находится арифметический корень четной степени. По определению эта величина неотрицательная. Поэтому в правой части уравнения может стоять только неотрицательное выражение. Получаем условие $x-2\ge 0$, которое определяет ОСР.

Следовательно, ОСР данного уравнения – все значения $x$ из промежутка $[2; \infty)$.

Очевидно, что **решение иррационального уравнения или неравенства может находиться только в множестве значений переменной, которое является пересечением ОДЗ и ОСР**.

***Пример 5***

Решим неравенство $\sqrt[4]{-x^2+6x-8} \le x-5$.

ОДЗ неравенства задается условием $-x^2+6x-8 \ge 0$, решение которого $x \in [2; 4]$. Так как в левой части данного неравенства находится неотрицательная величина (арифметический корень четной степени), то и правая часть должна быть неотрицательной: $x - 5 \ge 0$, откуда $x \in [5; \infty)$ – ОСР. Видно, что пересечение ОДЗ и ОСР неравенства является пустым множеством. Поэтому данное неравенство решений не имеет.

Заметим, что одним из приемов решения иррациональных уравнений и неравенств является возведение в степень обеих частей. В случае уравнений такая операция может привести к появлению посторонних корней, которые легко удаляются при проверке. При решении неравенств необходимо внимательно контролировать ОДЗ и ОСР. Полезно сочетать аналитическое решение с графическим как в случае уравнений, так и в случае неравенств.

Остановимся сначала на основных типах иррациональных уравнений и способах их решения. Систематизация этих типов весьма условна.

**1. Уравнения с одним знаком радикала**

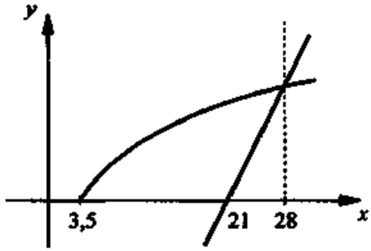
***Пример 6***

Решим уравнение $21+\sqrt{2x-7}=x$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x-7}=x-21$ и решим его двумя способами. Учтем, что для уравнения ОДЗ $x \in \left[\frac{7}{2}; \infty\right)$ и ОСР $x \in [21; \infty)$.

Поэтому корни уравнения могут находиться только в промежутке $x \in [21; \infty)$.

**1-й способ.** Возведем обе части уравнения в квадрат: $2x - 7 = x^2 - 42x + 441$ или $0 = x^2 - 44x + 448$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 28$ и $x_2 = 16$. Для данного иррационального уравнения корень $x = 16$ является посторонним, т. к. не входит в ОСР.




Для иллюстрации построим графики функций $y_1 = \sqrt{2x-7}$ и $y_2 = x - 21$. Видно, что эти графики пересекаются в единственной точке, абсцисса которой $x = 28$ и является корнем данного уравнения.

Недостаток этого способа решения – достаточно громоздкие коэффициенты полученного квадратного уравнения $0 = x^2 - 44x + 448$.

**2-й способ.** Введем новую переменную $t = \sqrt{2x-7}$ (где $t \geq 0$) и выразим $x$: $t^2 = 2x - 7$ и $x = \dfrac{t^2+7}{2}$. Тогда данное уравнение имеет вид: $21 + t = \dfrac{t^2+7}{2}$ или $0 = t^2 - 2t - 35$ (заметим, что коэффициенты этого квадратного уравнения небольшие), корни которого $t_1 = 7$ и $t_2 = -5$ (не подходит, т. к. $t \geq 0$). Вернемся к старой переменной и найдем корень данного уравнения: $x = \dfrac{7^2+7}{2} = 28.$

Из приведенного примера видно, что эффективным приемом является **использование новой переменной (замена переменной).**

***Пример 7***

Решим уравнение $x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2-4x+20} + 10 = 0.$

Введем новую переменную $t = \sqrt{x^2-4x+20}$ (где $t \geq 0$) и выразим соотношение $x^2 - 4x$. Имеем: $t^2 = x^2 - 4x + 20$, откуда $x^2 - 4x = t^2 - 20$. Тогда данное уравнение имеет вид: $t^2 - 20 - 3t + 10 = 0$ или $t^2 - 3t - 10 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 5$ и $t_2 = -2$ (не подходит, т. к. $t \geq 0$). Вернемся к старой переменной и получим квадратное уравнение $5^2 = x^2 - 4x + 20$ или $0 = x^2 - 4x - 5$, корни которого $x_1 = 5$ и $x_2 = -1$. Оба этих корня являются также корнями исходного уравнения.

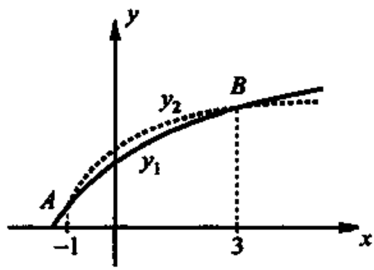
**2. Уравнения с двумя знаками радикала**

***Пример 8***

Решим уравнение $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1.$

Обсудим способы решения подобных уравнений.

**1-й способ.** Такой способ является традиционным и состоит в **уединении радикала и возведении** обеих частей уравнения **в степень.** Отметим, что ОДЗ уравнения $x \in [-1; \infty)$. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1}$ и возведем обе части уравнения в квадрат: $2x+3 = 1 + 2\sqrt{x+1} + x + 1$. Тогда $x+1 = 2\sqrt{x+1}$. Вновь возведем обе части уравнения в квадрат: $(x + 1)^2 = 4(x + 1)$ или $(x + 1)(x - 3) = 0$. Корни того уравнения $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ также являются решениями данного уравнения.




Проиллюстрируем наше решение графически. Построим графики функций $y_1 = \sqrt{2x+3}$ (сплошная линия) и $y_2 = 1 + \sqrt{x+1}$ (штрихпунктирная линия). Видно, что графики имеют две общие точки $A$ и $B$, абсциссы $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ которых являются корнями иррационального уравнения.

**2-й способ.** Введем новую переменную $t = \sqrt{x+1}$ (где $t \geq 0$). Тогда $t^2 = x + 1$ и $x = t^2 - 1$. Данное уравнение имеет вид: $\sqrt{2t^2+1} - t = 1$ и представляет собой уравнение уже с **одним радикалом.** Далее его можно решить, например, традиционным способом. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2t^2+1} = t + 1$ и возведем в квадрат обе части уравнения: $2t^2 + 1 = t^2 + 2t + 1$ или $t(t - 2) = 0$. Корни такого уравнения $t_1 = 0$ и $t_2 = 2$ удовлетворяют условию $t \geq 0$. Теперь найдем $x_1 = 0 - 1 = -1$ и $x_2 = 2^2 - 1 = 3$.

**3-й способ.** Введем две новые переменные $a = \sqrt{2x+3}$ и $b = \sqrt{x+1}$ (где $a, b \geq 0$). Тогда одно уравнение легко записать сразу: $a - b = 1$. Чтобы получить второе уравнение, возведем величины $a$ и $b$ в квадрат: $a^2 = 2x + 3$ и $b^2 = x + 1$. Для исключения переменной $x$ умножим второе соотношение на 2 и вычтем из первого: $a^2 - 2b^2 = 1$. Таким образом, исходное иррациональное уравнение свелось к системе алгебраических уравнений $\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 - 2b^2 = 1. \end{cases}$ При этом для нахождения $x$ достаточно найти любую из величин $a$ или $b$.

Из первого уравнения выразим $a = b + 1$ и подставим во второе: $(b+1)^2 - 2b^2 = 1$ или $0 = b(b-2)$. Корни этого уравнения $b_1 = 0$ и $b_2 = 2$ удовлетворяют условию $b \geq 0$ (тогда $a = b + 1$ тем более положительно). Находим $x = b^2 - 1$ и получаем: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$.

Последний способ решения полезен и в случае уравнений других типов.

### 3. Однородные иррациональные уравнения

***Пример 9***

Решим уравнение $\sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} = 2\sqrt[3]{x^2-1}$.

Так как в уравнение входят корни нечетной степени, то $x$ может быть любым действительным числом. Введем новые переменные $a = \sqrt[3]{x-1}$ и $b = \sqrt[3]{x+1}$. Тогда уравнение имеет вид: $a^2 - 3b^2 = 2ab$ или $a^2 - 2ab - 3b^2 = 0$. Левая часть этого уравнения представляет собой **однородный многочлен** второй степени по переменным $a$ и $b$. Решая полученное квадратное уравнение (считая, что $a$ – неизвестная, $b$ – постоянная величина), найдем $a = -b$ и $a = 3b$. Вернемся к неизвестной $x$. Имеем два случая:

а) $a = -b$ или $\sqrt[3]{x-1} = -\sqrt[3]{x+1}$. Возведем обе части уравнения в куб: $x - 1 = -(x + 1)$ – и найдем $x_1 = 0$;

б) $a = 3b$ или $\sqrt[3]{x-1} = 3\sqrt[3]{x+1}$. Обе части уравнения возводим в куб: $x - 1 = 27(x + 1)$ – и находим $x_2 = -\frac{28}{26} = -\frac{14}{13}$.

Итак, данное иррациональное уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{14}{13}$.

### 4. Уравнения с радикалами больших степеней

***Пример 10***

Решим уравнение $\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{2x-5} = 3$.

Очевидно, что $x$ может быть любым действительным числом. Введем новые переменные $a = \sqrt[3]{3x-1}$ и $b = \sqrt[3]{2x-5}$. Запишем первое уравнение $a + b = 3$. Чтобы получить второе уравнение, возведем в куб величины $a$ и $b$ и получим: $a^3 = 3x - 1$ и $b^3 = 2x - 5$. Для исключения переменной $x$ умножим первое равенство на 2, второе – на 3: $2a^3 = 6x - 2$ и $3b^3 = 6x - 15$ – и вычтем эти соотношения: $2a^3 - 3b^3 = 13$. Таким образом, исходное иррациональное уравнение свелось к системе алгебраических уравнений $\begin{cases} a + b = 3, \\ 2a^3 - 3b^3 = 13. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $b = 3 - a$ и подставим во второе: $2a^3 - 3(3 - a)^3 = 13$ или $5a^3 - 27a^2 + 81a - 94 = 0$. Это кубическое уравнение имеет единственный действительный корень $a = 2$. Находим $x = \dfrac{a^3+1}{3} = 3$. Итак, данное уравнение имеет одно решение $x = 3$.

**5. Уравнения с громоздкими радикалами**

***Пример 11***

Решим уравнение $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=5$.

Каждое подкоренное выражение является полным квадратом. Однако это далеко не очевидно. Введем две новые переменные $a=\sqrt{x+1}$ и $b=\sqrt{x-2}$ (где $x \ge 2$). С помощью этих величин выразим переменную $x$: $x = a^2 - 1$ и $x = b^2 + 2$. Тогда уравнение имеет вид $\sqrt{a^2-1+2+2a}+\sqrt{b^2+2+7-6b}=5$, или $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(b-3)^2}=5$, или $|a + 1| + |b - 3| = 5$, или $a + 1 + |b - 3| = 5$ (учтено, что $a \ge 0$), или $a + |b - 3| = 4$. В полученном равенстве раскроем знак модуля и вернемся к неизвестной $x$.

а) Если $b - 3 < 0$ (т. е. $b < 3$ или $\sqrt{x-2}<3$), то равенство имеет вид: $a - b + 3 = 4$, или $a = b + 1$, или $\sqrt{x+1}=\sqrt{x-2}+1$. Возведем в квадрат обе части этого уравнения: $x+1=x-2+2\sqrt{x-2}+1$ или $1=\sqrt{x-2}$ (при этом выполнено условие $\sqrt{x-2}<3$). Тогда $1 = x - 2$ и $x = 3$ – корень исходного иррационального уравнения.

б) Если $b - 3 \ge 0$ (т. е. $b \ge 3$ или $\sqrt{x-2}\ge 3$), то равенство имеет вид: $a + b - 3 = 4$, или $a + b = 7$, или $a = 7 - b$, или $\sqrt{x+1}=7-\sqrt{x-2}$. Возведем в квадрат обе части этого уравнения: $x + 1 = 49 - -14\sqrt{x-2}+x-2$ или $23=7\sqrt{x-2}$, откуда $\dfrac{23}{7}=\sqrt{x-2}$ (при этом выполнено условие $\sqrt{x-2}\ge 3$). Возведем в квадрат обе части такого уравнения: $\dfrac{529}{49}=x-2$, откуда $x=12\dfrac{39}{49}$ – также корень данного уравнения.

**6. Уравнения, в которых важна группировка членов**

Даже в достаточно сложных уравнениях **традиционный способ** решения (возведение в степень) дает хорошие результаты, если предварительно сделать **группировку членов** уравнения.

***Пример 12***

Решим уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

Учтем ОДЗ: $x \in [-1; \infty)$ – и запишем уравнение в виде $\sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12} - \sqrt{x+1}$, учитывая **коэффициенты при неизвестной.** Возведем в квадрат обе части: $4x+13 = 3x+12-2\sqrt{3x+12}\cdot\sqrt{x+1}+x+1$ или $0 = \sqrt{3x+12}\cdot\sqrt{x+1}$. Очевидно, что уравнение имеет два корня: $x_1 = -4$ (не входит в ОДЗ) и $x_2 = -1$. Итак, исходное иррациональное уравнение имеет единственный корень $x = -1$.

В заключение этой части занятия еще раз отметим полезность и целесообразность введения **новых переменных (замен неизвестных)**, рассмотрев следующий пример.

***Пример 13***

Решим уравнение $x^3+1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Понятно, что возведение в куб обеих частей уравнения ничего не дает, т. к. возникает уравнение девятой степени. Поэтому введем новую неизвестную $t = \sqrt[3]{2x-1}$. Сразу можно написать первое уравнение: $x^3 + 1 = 2t$. Чтобы получить второе уравнение, возведем в куб выражение для величины $t$: $t^3 = 2x - 1$ или $t^3 + 1 = 2x$. Получим систему алгебраических уравнений $\begin{cases} x^3+1 = 2t, \\ t^3+1 = 2x. \end{cases}$

Вычтем уравнения друг из друга: $x^3 - t^3 = 2(t-x)$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $(x-t)(x^2+xt+t^2)+2(x-t) = 0$ или $(x-t)(x^2+xt+t^2+2) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем: $x - t = 0$ (т. е. $x = t$) и $x^2+xt+t^2+2 = 0$ (это уравнение не имеет решений, т. к. дискриминант $D = t^2-4(t^2+2) = -3t^2-8 < 0$ при всех значениях $t$). Подставим $t = x$ в первое уравнение системы и получим кубическое уравнение: $x^3 + 1 = 2x$ или $x^3 - 2x + 1 = 0$, которое имеет корни $x_1 = 1$ и $x_{2,3} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Эти корни являются также решениями данного иррационального уравнения.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Какие уравнения (неравенства) называются иррациональными? Приведите примеры.

2. Дайте определение области допустимых значений (ОДЗ) уравнения или неравенства.

3. Что называется областью существования решений (ОСР) уравнения или неравенства?

**V. Творческие задания (на уроках и дома)**

Решите уравнения:

1) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4;$

2) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1;$

3) $\sqrt{x^2-x-1}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2-x-1}}=13;$

4) $\sqrt{x^2-x+6}+\dfrac{6}{\sqrt{x^2-x+6}}=7;$

5) $x^2+\sqrt{x^2-x+9}=3+x;$

6) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4;$

7) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1;$

8) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x;$

9) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2;$

10) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3;$

11) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2;$

12) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

*Ответы*: 1) $x_1=-\dfrac{3}{2},\ x_2=\dfrac{1}{2}$; 2) $x=\dfrac{5}{2}$; 3) $x_1=-1, x_2=2$; 4) $x_1=-5$, $x_2=6$; 5) $x_1=0$, $x_2=1$; 6) $x_1=1$, $x_2=2$; 7) $x_1=0$, $x_2=5$; 8) $x=7$; 9) $x\in[-1;1]$; 10) $x\in[2;\infty)$; 11) $x\in[2;\infty)$; 12) $x\in[5;10]$.

**VI. Подведение итогов уроков**

## Уроки 11–12. Системы иррациональных уравнений. Иррациональные неравенства (факультативное занятие)

*Цели*: рассмотреть наиболее типичные системы иррациональных уравнений; обсудить решение иррациональных неравенств.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и целей уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Дайте определение области допустимых значений (ОДЗ) уравнения или неравенства. Приведите примеры.

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt[3]{45-2x^2}=3$;

б) $\sqrt{3x-2}=5x-8$;

в) $\sqrt{3x+1}+2\sqrt{5x-1}=6$.

**Вариант 2**

1. Дайте определение области существования решений (ОСР) уравнения или неравенства. Приведите примеры.

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt[3]{3x^2+15}=3$;

б) $\sqrt{5x+1}=3x-5$;

в) $\sqrt{5x+6}+2\sqrt{x+2}=8$.

**III. Изучение нового материала**

Прежде всего остановимся на **системах иррациональных уравнений**. Как правило, такие системы решатся с помощью **замены переменных** (или переменной).

***Пример 1***

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ x+y=9.\end{cases}$

Введем две новые переменные $a=\sqrt[3]{x}$ и $b=\sqrt[3]{y}$. Тогда получим систему алгебраических уравнений $\begin{cases}a+b=3,\\ a^3+b^3=9.\end{cases}$ Левую часть второго уравнения разложим на множители $\begin{cases}a+b=3,\\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=9\end{cases}$ и подставим первое уравнение во второе. Приходим к симметричной системе уравнений $\begin{cases}a+b=3,\\ a^2-ab+b^2=3.\end{cases}$ Из первого уравнения выразим $b=3-a$ и подставим во второе. Получаем: $a^2-a(3-a)+(3-a)^2=3$ или $a^2-3a+2=0$. Корни этого уравнения $a_1=1$ и $a_2=2$. Соответствующие значения $b_1 = 2$ и $b_2 = 1$. Вернемся к старым переменным и получим две простейшие системы уравнений: $\begin{cases}\sqrt[3]{x} = 1,\\ \sqrt[3]{y} = 2\end{cases}$ (решение $x = 1, y = 8$) и $\begin{cases}\sqrt[3]{x} = 2,\\ \sqrt[3]{y} = 1\end{cases}$ (решение $x = 8, y = 1$). Таким образом, данная система уравнений имеет два решения: (1; 8) и (8; 1).

***Пример 2***

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2},\\ x^2 + y^2 = 17.\end{cases}$

Сначала рассмотрим первое уравнение. Введем для него новую неизвестную $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Тогда уравнение имеет вид: $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2}$ или $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 2$ (тогда $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 2$ и $x = 4y$) и $t_2 = \dfrac{1}{2}$ (откуда $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{1}{2}$ и $y = 4x$).

Вернемся к старым переменным и получим системы алгебраических уравнений: $\begin{cases}x = 4y,\\ x^2 + y^2 = 17\end{cases}$ (решения $x = 4, y = 1$ и $x = -4, y = -1$) и $\begin{cases}y = 4x,\\ x^2 + y^2 = 17\end{cases}$ (решения $x = 1, y = 4$ и $x = -1, y = -4$). Таким образом, исходная система имеет четыре решения: (4; 1), (–4; –1), (1; 4), (–1; –4).

Достаточно часто при решении систем иррациональных уравнений их необходимо **преобразовать** и найти более простую **связь между неизвестными**.

***Пример 3***

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x + \sqrt{y}} - \sqrt{x - \sqrt{y}} = 2,\\ \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y} = 4.\end{cases}$

Возведем первое уравнение в квадрат и получим: $x + \sqrt{y} - 2\sqrt{x^2 - y} + x - \sqrt{y} = 4$ или $x - 2 = \sqrt{x^2 - y}$. Учтем, что $x - 2 \geq 0$ (т. е. $x \geq 2$ – ОСР), и вновь возведем обе части уравнения в квадрат:

$x^2-4x+4=x^2-y$, откуда $y=4x-4$. Таким образом, нашли линейную связь между неизвестными $x$ и $y$.

Подставим соотношение $y=4x-4$ во второе уравнение системы: $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x-4}=4$, или $|x-2|+\sqrt{x^2+4x-4}=4$, или $x-2+\sqrt{x^2+4x-4}=4$ (учтено, что $x \geq 2$ и $|x-2|=x-2$), откуда $\sqrt{x^2+4x-4}=6-x$ (заметим, что $x \leq 6$ – ОСР). Возведем в квадрат обе части уравнения: $x^2+4x-4=36-12x+x^2$ – и найдем $x=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}$, которое удовлетворяет условиям $2 \leq x \leq 6$. Теперь определим $y=4\cdot\frac{5}{2}-4=6$. Итак, данная система имеет единственное решение $(\frac{5}{2};\ 6)$.

Обратимся теперь к **иррациональным неравенствам**. Если в случае уравнений и систем уравнений, как правило, было конечное число решений (и их можно было легко проверить подстановкой), то в случае неравенств решением являются числовые промежутки, которые подстановкой проверить невозможно. Поэтому в иррациональных неравенствах необходимо четко контролировать ОДЗ и ОСР.

***Пример 4***

Решим неравенство $\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}} \geq \sqrt{3}-2\sqrt{7}$.

ОДЗ неравенства задается условием $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} \geq 0$. Так как левая часть неравенства по определению арифметического корня неотрицательна, а правая часть является отрицательным числом, то ОСР – любое действительное число $x$. Поэтому данное неравенство выполняется при всех значениях $x$, которые входят в ОДЗ. Другими словами, данное неравенство равносильно неравенству $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} \geq 0$, или $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} \geq 0$, или $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$ и $x \neq 3$. Решая такое неравенство методом интервалов, получим: $x \in (-\infty;\ 1) \cup [2;\ 3) \cup (3;\ \infty)$.

Запомните железное **правило: обе части неравенства можно возводить в четную степень, если эти части неотрицательны.**

***Пример 5***

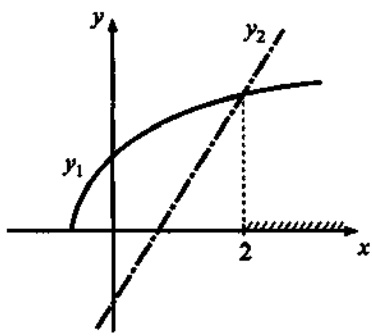
Решим неравенство $\sqrt{6x+4} \le 3x-2$.

ОДЗ неравенства задается условием $6x + 4 \ge 0$, откуда $x \in \left[-\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Так как левая часть неотрицательна, то правая часть неравенства тем более должна быть неотрицательной.

Поэтому ОСР определяется условием $3x - 2 \ge 0$, откуда $x \in \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведем их в квадрат. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем: $6x+4 \le 9x^2-12x+4$ или $0 \le x(x-2)$. Решение этого квадратного неравенства $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$. С учетом ОДЗ и ОСР получаем решение данного иррационального неравенства $x \in [2; \infty)$.




Дадим графическую иллюстрацию решения. На рисунке приведены эскизы графиков $y_1 = \sqrt{6x+4}$ (сплошная линия) и $y_2 = 3x - 2$ (штрихпунктирная линия). Видно, что неравенство $y_1 \le y_2$ (график $y_1$ располагается не выше графика $y_2$) при $x \in [2; \infty)$.

***Пример 6***

Решим неравенство $\sqrt{2x+14} > x+3$.

ОДЗ неравенства $x \in [-7; \infty)$, ОСР – любое действительное число $x$.

При этом правая часть неравенства может быть как отрицательной, так и неотрицательной. В связи с этим естественным образом возникают два случая.

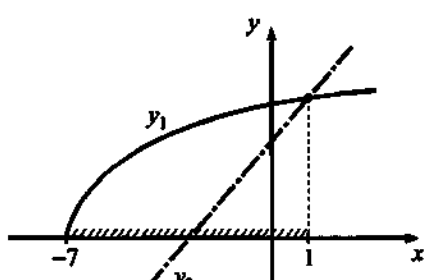
а) Если $x + 3 < 0$, то неравенство, очевидно, выполняется при всех $x$, входящих в ОДЗ. Имеем систему линейных неравенств $\begin{cases} x+3<0, \\ 2x+14\ge 0, \end{cases}$ решение которых $\begin{cases} x<-3, \\ x\ge -7, \end{cases}$ откуда $x\in[-7;-3)$.

б) Если $x + 3 \ge 0$, то имеем право возвести в квадрат обе части данного иррационального неравенства. Получаем систему неравенств: $\begin{cases} x+3\ge 0, \\ 2x+14>(x+3)^2. \end{cases}$ При этом в силу второго неравенства величина $2x + 14$ больше квадрата некоторого выражения и будет положительной. Поэтому решения второго неравенства (и всей системы этого случая) автоматически входят в ОДЗ. Никаких дополнительных условий записывать не надо.

Решая систему случая *б*, получаем: $\begin{cases} x\ge -3, \\ 2x+14>x^2+6x+9 \end{cases}$ или $\begin{cases} x\ge -3, \\ 0>x^2+4x-5. \end{cases}$ Решение этих неравенств $\begin{cases} x\ge -3, \\ -5<x<1, \end{cases}$ откуда $x\in[-3;1)$.

Объединяя ответы случаев *а* и *б*, получаем окончательное решение данного иррационального неравенства $x\in[-7;1)$.

Приведем графическую интерпретацию решения неравенства. Построим эскизы графиков функций $y_1=\sqrt{2x+14}$ (сплошная линия) и $y_2 = x + 3$ (штрихпунктирная линия). Неравенство $y_1 > y_2$ (т. е. график $y_1$ лежит выше графика $y_2$) выполняется при $x\in[-7;1)$.




Разумеется, при решении иррациональных неравенств используются те же приемы, что и в случае уравнений и систем уравнений, в частности замена переменной.

***Пример 7***

Решим неравенство $\frac{3}{\sqrt{5-x}}-\sqrt{5-x}<2.$

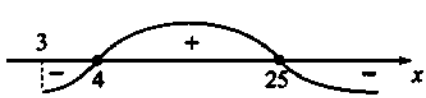
ОДЗ данного неравенства задается условием $5 - x > 0$, откуда $x < 5$. Введем новую переменную $t=\sqrt{5-x}$ (где $t > 0$). Получаем неравенство $\frac{3}{t}-t<2.$ Так как величина $t > 0$, то умножим обе части неравенства на $t$. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем квадратное неравенство: $3 - t^2 < 2t$ или $0 < t^2 + 2t - 3$. Его решения $t < -3$ и $t > 1$. Так как $t > 0$, то неравенство $t < -3$ не выполняется. Рассмотрим неравенство $t > 1$ (при этом условие $t > 0$ выполнено) или $\sqrt{5-x}>1$. Возведем в квадрат обе неотрицательные части этого неравенства. Получаем: $5 - x > 1$, откуда $x < 4$. Итак, решение данного неравенства $x\in(-\infty;\ 4)$.

Как и при решении неравенств других типов, наиболее **эффективным и мощным методом** решения иррациональных неравенств является **метод интервалов**. Однако использовать его можно только в **области непрерывности** рассматриваемой функции.

***Пример 8***

Решим неравенство $\frac{\sqrt{x-3}-1}{5-\sqrt{x}}\le 0.$

ОДЗ неравенства задается условиями $\begin{cases} x-3\ge 0, \\ x\ge 0, \\ 5-\sqrt{x}\ne 0, \end{cases}$ откуда $x\in[3;\ 25)\cup(25;\ \infty)$. В этой области левая часть неравенства является непрерывной функцией. Найдем точки, в которых числитель и знаменатель дроби равны нулю. Для этого решаем уравнения $\sqrt{x-3}-1=0$ (корень $x = 4$) и $5-\sqrt{x}=0$ (решение $x = 25$). Отметим эти точки на числовой оси.



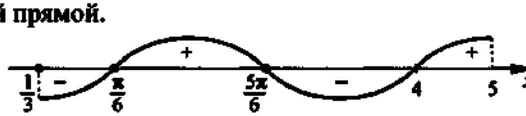

Определим знак величины $\frac{\sqrt{x-3}-1}{5-\sqrt{x}}$, например, при $x = 9$ и получим: $\dfrac{\sqrt{9-3}-1}{5-\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}>0$. Построим диаграмму знаков левой части неравенства. Теперь легко записать ответ: $x\in[3;\ 4]\cup(25;\ \infty)$.

Метод интервалов удобно использовать, если кроме иррациональных функций в неравенство входят и **функции других видов.**

***Пример 9***

Решим неравенство $\dfrac{\sqrt{25-x^2}-3}{\sqrt{3x-1}(2\sin x-1)}\geq 0$.

ОДЗ неравенства задается условиями $\begin{cases}25-x^2\geq 0,\\ 3x-1>0,\\ \sin x\neq \dfrac{1}{2}.\end{cases}$ Решение первых двух неравенств дает промежуток $\left(\dfrac{1}{3};\ 5\right]$. В этом интервале найдем точки, в которых числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Получаем уравнения: $\sqrt{25-x^2}-3=0$ (корень $x=4$) и $\sin x=\dfrac{1}{2}$ (решения $x=\dfrac{\pi}{6}\approx 0,5$ и $x=\dfrac{5\pi}{6}\approx 2,5$). Отметим эти точки на числовой прямой.




Определим знак левой части неравенства, например, в точке $x=3$ и получим: $\dfrac{\sqrt{25-3^2}-3}{\sqrt{3\cdot 3-1}(2\sin 3-1)}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}(2\sin 3-1)}<0$. Построим диаграмму знаков дроби. На основании диаграммы выпишем ответ: $x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}\right)\cup[4;\ 5]$.

**IV. Творческие задания (на уроках и дома)**

**1) Решите системы иррациональных уравнений:**

а) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}}=2,\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-\sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}}=1,5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1,\\ 2x+y=2;\end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-2}} - \dfrac{4}{\sqrt{y+2}} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{3}{\sqrt{y+2}} = \dfrac{13}{6}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{2x-3y} + \sqrt{2x-3y} = 10, \\ \sqrt{4x^2-9y^2} = 16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x = 7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \sqrt{2-x} + \sqrt{5-y} = 3, \\ 5x + 2y - xy = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sqrt{x^2-4xy-3y^2} = x+1, \\ x+y = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4; \end{cases}$ к) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{y+z} = 3, \\ \sqrt[3]{y+z} + \sqrt[3]{z+x} = 1, \\ \sqrt[3]{z+x} + \sqrt[3]{x+y} = 0; \end{cases}$

л) $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 2z - y, \\ \sqrt{2-x-x^2} = 2y - 3z + 5; \end{cases}$ м) $\begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-y)^2} = z, \\ \sqrt{z-1} = 8 - x - y. \end{cases}$

*Ответы*: а) (11; 1); б) (2; –2); в) (11; 34); г) (17; –10), (17; 10); д) (1; 1), $\left(\dfrac{5}{2}; -2\right)$; е) (1; 1), (–2; 4); ж) (2; –1); з) (2; 2); и) (3; –2; 6); к) (–4; 5; 3); л) (1; 10; 5); м) (4; 4; 1).

**2) Решите неравенство:**

а) $\sqrt{24-5x} \geq x$; б) $\sqrt{1-4x} > 2x+1$;

в) $\sqrt{2x-x^2} > 4-x$; г) $\sqrt{x^2-x-1} \leq 2x+3$;

д) $\sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x+4}$; е) $\sqrt{3x+1} < \sqrt{x+3}$;

ж) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} \leq 7$; з) $\sqrt{x-6} - \sqrt{10-x} \geq 1$;

и) $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$; к) $\sqrt{x^2-2x-2} + \sqrt{x^2-2x+6} < 4$;

л) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} > \dfrac{x-1}{x}$; м) $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}} < x - \sqrt{x-\dfrac{9}{x}}$;

н) $\sqrt{x^2-5} + 3 > |x-1|$; о) $2\sqrt{x^2-x-2} \geq |x+1| - 2$.

*Ответы*: а) $(-\infty; 3]$; б) $(-\infty; 0)$; в) $\varnothing$; г) $\left[-1; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$;

д) $[5; \infty)$; е) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right)$; ж) $\left[\frac{2}{3}; 6\right]$; з) $\left[\frac{16+\sqrt{7}}{2}; 10\right]$; и) $(-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$;

к) $(-1; 1-\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{3}; 3)$; л) $\left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$;

м) $\left[3; \frac{1+\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}; \infty\right)$; н) $\left(-\infty; -\frac{9}{4}\right) \cup (\sqrt{5}; \infty)$;

о) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1+2\sqrt{7}}{3}; \infty\right)$.

**V. Подведение итогов уроков**

## Уроки 13–14. Контрольная работа по теме «Степени и корни. Степенные функции»

***Цель***: проверка знаний учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Варианты контрольной работы**

**Вариант 1**

1. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}} \cdot \sqrt[4]{16}$.

2. Упростите выражение $\frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{35-5x}+2x=9$.

4. Решите неравенство $(\sqrt{x}-3)(x^4-2) \geq 0$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{xy}=2. \end{cases}$

6. Сравните числа $\sqrt[7]{2^4}$ и $\sqrt[3]{2^2}$.

**Вариант 2**

1. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} \cdot \sqrt[3]{-125}$.

2. Упростите выражение $\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{18x+1}-3x=1$.

4. Решите неравенство $(\sqrt{x}-2)(x^4-3)\le 0$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{x}+\sqrt{y}=7, \\ \sqrt{xy}=2. \end{cases}$

6. Сравните числа $\sqrt[8]{5^7}$ и $\sqrt[4]{5^3}$.

**Вариант 3**

1. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{1\dfrac{11}{16}\cdot 4{,}5}-\dfrac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}$.

2. Упростите выражение $3(a-1)+2\sqrt[5]{a^5}-5\sqrt[4]{a^4}$ при $a\le 0$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3x^2-4x+15}+\sqrt{3x^2-4x+8}=7$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x+y+4}+\sqrt{x+3y+11}=7, \\ 3x+4y=10. \end{cases}$

5. Решите неравенство $\sqrt{7+3x}\ge 1-x$.

6. Упростите функцию $y=\sqrt{x^2-4x+4}+x$.

**Вариант 4**

1. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{3\dfrac{3}{8}\cdot 1\dfrac{1}{2}}+\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$.

2. Упростите выражение $2(a-3)+3\sqrt[3]{a^3}+4\sqrt[6]{a^6}$ при $a\le 0$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3-2x^2+3x}-\sqrt{2x^2-3x+2}=1$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+2y+4}+\sqrt{3x+4y+5}=7, \\ 4x+6y=16. \end{cases}$

5. Решите неравенство $\sqrt{1-4x}\ge 2x+1$.

6. Упростите функцию $y=\sqrt{x^2-6x+9}-x$.

**Вариант 5**

1. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{9-\sqrt{54}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{54}}$.

2. Упростите выражение $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

3. Решите уравнение $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3,\\ 2xy-y+6x=7.\end{cases}$

5. Постройте график функции $y=\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}$.

6. Докажите, что число $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ является натуральным числом.

**Вариант 6**

1. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$.

2. Упростите выражение $\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\dfrac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

3. Решите уравнение $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{2-x}+\sqrt{5-y}=3,\\ 5x+2y-xy=6.\end{cases}$

5. Постройте график функции $y=\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$.

6. Докажите, что число $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ является натуральным числом.

## Урок 15. Итоги контрольной работы

***Цели***: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

### Ход урока

**I. Сообщение темы и целей урока**

**II. Итоги контрольной работы**

**III. Ответы и решения**

***Ответы***

**Вариант 1**

1. 10.

2. $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

3. $x = 2$.

4. $x \in [0; \sqrt[4]{2}] \cup [9; \infty)$.

5. (4; 1).

6. Второе число больше.

**Вариант 2**

1. –10.

2. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

3. $x = 1$ и $x = \dfrac{4}{3}$.

4. $x \in [\sqrt[4]{3}; 4]$.

5. $(4; 1), (\dfrac{1}{9}; 36)$.

6. Первое число больше.

**Вариант 3**

1. 1.

2. $10a - 3$.

3. $\varnothing$.

4. $(2; 1), \left(\dfrac{38}{5}; -\dfrac{16}{5}\right)$.

5. $x \in [-1; \infty)$.

6. $y = 2$ при $x < 2$ и $y = 2x - 2$ при $x \geq 2$.

**Вариант 4**

1. 2.

2. $a - 6$.

3. $x = 1$ и $x = \dfrac{1}{2}$.

4. (2; 1), (–20; 16).

5. $x \in (-\infty; 0]$.

6. $y = 3 - 2x$ при $x < 3$ и $y = -3 - 2$ при $x \geq 3$.

***Решения***

**Вариант 5**

1. Используем свойства корней и формулу разности квадратов. Получаем: $\sqrt[3]{9-\sqrt{54}} \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{54}} = \sqrt[3]{(9-\sqrt{54})(9+\sqrt{54})} = \sqrt[3]{81-54} = \sqrt[3]{27} = 3$.

*Ответ*: 3.

2. Приведем дроби к общему знаменателю и упростим:

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2\sqrt{b}(a-b)-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=$$

$$=\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{b}-2b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=$$

$$=\frac{(a\sqrt{a}-b\sqrt{a})+(a\sqrt{b}-b\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=\frac{\sqrt{a}(a-b)+\sqrt{b}(a-b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}=1.$$

*Ответ*: 1.

3. Для решения уравнения $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$ введем новые переменные $a=\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}$ и $b=\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}$. Запишем первое уравнение: $a-b=1$. Возведем в куб новые переменные $a^3=24+\sqrt{x}$ и $b^3=5+\sqrt{x}$. Вычтем эти равенства друг из друга и получим второе уравнение: $a^3-b^3=19$ или $(a-b)(a^2+ab+b^2)=19$, откуда (с учетом первого уравнения) $a^2+ab+b^2=19$. Получаем систему уравнений $\begin{cases}a=b+1,\\ a^2+ab+b^2=19.\end{cases}$ Подставим первое уравнение во второе: $(b+1)^2+(b+1)b+b^2=19$ или $b^2+b-6=0$. Корни этого уравнения $b_1=2$ и $b_2=-3$. Вернемся к старой переменной. Получаем уравнения: $2^3=5+\sqrt{x}$ (корень $x=9$) и $(-3)^3=5+\sqrt{x}$ (корней не имеет).

*Ответ*: $x=9$.

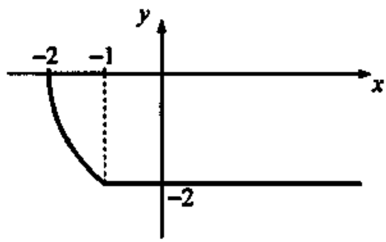
4. Для решения системы уравнений $\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3,\\ 2xy-y+6x=7\end{cases}$ введем новые переменные $a=\sqrt{2x-1}$ и $b=\sqrt{y+3}$. Запишем первое уравнение: $a+b=3$. Найдем квадраты новых переменных: $a^2=2x-1$ и $b^2=y+3$ и перемножим их: $a^2b^2=2xy=y+6x-3$, откуда $a^2b^2+3=2xy-y+6x$. Можно записать второе уравнение: $a^2b^2+3=7$, откуда $ab=2$ (учтено, что $a$, $b\geq 0$). Получаем систему уравнений: $\begin{cases}a+b=3,\\ ab=2,\end{cases}$ решение которой $a_1=1$, $b_1=2$ и $a_2=2$, $b_2=1$. Вернемся к

старым переменным. Имеем две системы уравнений: $\begin{cases}1^2 = 2x-1,\\ 2^2 = y+3\end{cases}$

(решение $x = 1, y = 1$) и $\begin{cases}2^2 = 2x-1,\\ 1^2 = y+3\end{cases}$ (решение $x = \frac{5}{2}$, $y = -2$).

*Ответ*: $(1; 1)$, $\left(\frac{5}{2}; -2\right)$.

5. Область определения функции $x \geq -2$. Введем переменную $z = \sqrt{x+2}$, тогда $x = z^2 - 2$. Функция имеет вид $y = \sqrt{z^2+1-2z} - \sqrt{z^2+1+2z}$ или $y = |z-1| - (z+1)$. Раскроем знак модуля. При $z < 1$ (т. е. $\sqrt{x+2} < 1$ или $x < -1$) получаем: $y = -2z = -2\sqrt{x+2}$, при $z \geq 1$ (т. е. $x \geq -1$) имеем: $y = -2$. Построим этот график.




*Ответ*: см. график.

6. Напомним формулу куба суммы $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Обозначим сумму: $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ и возведем ее в куб: $x^3 = 20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\cdot x$ или $x^3 = 40 + 6x$. Для нахождения $x$ получили кубическое уравнение $x^3 - 6x - 40 = 0$, которое имеет один действительный корень $x = 4$ (натуральное число).

*Ответ*: доказано.

**Вариант 6**

1. Используем свойства корней и формулу разности квадратов. Получаем: $\sqrt[4]{9-\sqrt{64}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}} = \sqrt[4]{(9-\sqrt{65})(9+\sqrt{65})} = \sqrt[4]{81-65} = \sqrt[4]{16} = 2.$

*Ответ*: 2.

2. Используем формулу суммы кубов, приведем дроби к общему знаменателю и упростим: $\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\cdot\frac{a+b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} -$

$$-\frac{2\sqrt{a}(a-\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})-2\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=-\frac{2\sqrt{b}}{a-b}=\frac{2\sqrt{b}}{b-a}.$$

*Ответ*: $\frac{2\sqrt{b}}{b-a}$.

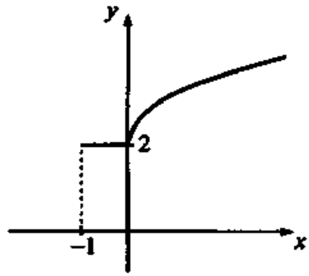
3. Для решения уравнения $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$ введем новые переменные $a=\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}$ и $b=\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}$. Запишем первое уравнение: $a+b=4$. Возведем в куб новые переменные: $a^3=9-\sqrt{x+1}$ и $b^3=7+\sqrt{x+1}$. Сложим эти равенства и получим второе уравнение $a^3+b^3=16$ или $(a+b)(a^2-ab+b^2)=16$, откуда (с учетом первого уравнения) $a^2-ab+b^2=4$. Получаем систему уравнений $\begin{cases}b=4-a,\\a^2-ab+b^2=4.\end{cases}$ Подставим первое уравнение во второе: $a^2-a(4-a)+(4-a)^2=4$ или $a^2-4a+4=0$. Корень этого уравнения $a=2$. Вернемся к старой переменной. Получаем уравнение: $2^3=9-\sqrt{x+1}$ или $\sqrt{x+1}=1$. Корень этого уравнения $x=0$.

*Ответ*: $x=0$.

4. Для решения системы уравнений $\begin{cases}\sqrt{2-x}+\sqrt{5-y}=3,\\5x+2y-xy=6\end{cases}$ введем новые переменные $a=\sqrt{2-x}$ и $b=\sqrt{5-y}$. Запишем первое уравнение: $a+b=3$. Найдем квадраты новых переменных: $a^2=2-x$ и $b^2=5-y$ и перемножим их: $a^2b^2=10-5x-2y+xy$, откуда $5x+2y-xy=10-a^2b^2$. Можно записать второе уравнение: $10-a^2b^2=6$, откуда $ab=2$ (учтено, что $a,\ b\ge 0$). Получаем систему уравнений $\begin{cases}a+b=3,\\ab=2,\end{cases}$ решение которой $a_1=1$, $b_1=2$ и $a_2=2$, $b_2=1$. Вернемся к старым переменным. Имеем две системы уравнений: $\begin{cases}1^2=2-x,\\2^2=5-y\end{cases}$ (решение $x=1$, $y=1$) и $\begin{cases}2^2=2-x,\\1^2=5-y\end{cases}$ (решение $x=-2$ $y=4$).

*Ответ*: (1; 1), (–2; 4).

5. Область определения функции $x \geq -1$. Введем переменную $z = \sqrt{x+1}$, тогда $x = z^2 - 1$. Функция имеет вид: $y = \sqrt{z^2+1+2z} + \sqrt{z^2+1-2z}$ или $y = z+1+|z-1|$. Раскроем знак модуля. При $z < 1$ (т. е. $\sqrt{x+1} < 1$ или $x < 0$) получаем $y = 2$, при $z \geq 1$ (т. е. $x \geq 0$) имеем: $y = 2z = 2\sqrt{x+1}$. Построим этот график.




*Ответ*: см. график.

6. Напомним формулу куба суммы: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Обозначим сумму: $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ и возведем ее в куб: $x^3 = 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})}\cdot x$ или $x^3 = 18 + 3x$. Для нахождения $x$ получили кубическое уравнение $x^3 - 3x - 18 = 0$, которое имеет один действительный корень $x = 3$ (натуральное число).

*Ответ*: доказано.

## Урок 16. Обобщение понятия о показателе степени

***Цели***: обобщить понятие степени числа; рассмотреть свойства степеней.

### Ход урока

**I. Сообщение темы и целей урока**

**II. Изучение нового материала**

В более ранних классах было определено понятие степени числа с целым показателем. Выражение $a^n$ имеет смысл **при всех целых $n$ и любых значениях $a$, кроме $a = 0$ и $n \leq 0$.**

***Пример 1***

а) Выражения $(-3{,}2)^3$, $(-2{,}1)^2$, $(-1{,}5)^0$, $(2{,}3)^4$, $0^2$ и т. д. определены.

б) Выражения $0^{-3}$, $0^{-7}$, $0^0$ не имеют смысла.

Напомним **свойства** таких **степеней**. Для любых чисел $a$, $b$ и любых целых чисел $m$ и $n$ выполнены равенства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$; 6) $a^1 = a$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$; 7) если $m > n$, то $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.

Теперь необходимо понять смысл выражений $3^{0,4}$, $4^{\frac{5}{7}}$, $5^{-\frac{1}{2}}$ и т. д. Для этого надо таким образом **обобщить понятие степени**, так чтобы выполнялись все или часть перечисленных свойств степеней. Рассмотрим равенство $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$. Тогда по определению корня $q$-й степени разумно считать, что $a^{\frac{p}{q}}$ будет корнем $q$-й степени из числа $a^p$.

Итак, **степенью числа** $a > 0$ **с рациональным показателем** $r = \frac{p}{q}$ (где $p$ – целое число, $q$ – натуральное $(q > 1)$) **называется число** $\sqrt[q]{a^p}$, т. е. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. При этом степень числа 0 определена только для положительных показателей, т. е. $0^r = 0$ для любого $r > 0$.

***Пример 2***

По определению степени с рациональным показателем и свойствам корней получаем: $7{,}2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7{,}2}$; $2{,}1^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2{,}1^2} = \sqrt[5]{4{,}41}$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Сделаем **ряд замечаний**, связанных с понятием степени с рациональным показателем.

1) **Для** любого $a > 0$ и любого рационального числа $r$ **число** $a^r > 0$.

2) По основному свойству дробей рациональное число можно записать в виде $\frac{pk}{qk}$ для любого натурального числа $k$. Тогда **значение степени не зависит от формы записи рационального числа**, т. к. $a^{\frac{pk}{qk}} = \sqrt[qk]{a^{pk}} = \sqrt[q]{a^p} = \frac{p}{a^q}$.

3) **При** $a < 0$ рациональная **степень** числа $a$ **не определена**. Поясним это примером. Рассмотрим $(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$. С другой сторо-

ны, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, и тогда $(-64)^{\frac{1}{3}}=(-64)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-64)^2}=\sqrt[6]{64^2}=\sqrt[6]{4^6}=4$. Получаем противоречие.

Для приведенного определения степени с рациональным показателем выполняются все приведенные ранее основные свойства степеней, но только для положительных оснований.

Итак, для любых рациональных чисел $s$ и $t$ и любых положительных чисел $a$ и $b$ справедливы равенства:

1) $a^s\cdot a^t=a^{s+t}$;

2) $a^s:a^t=a^{s-t}$;

3) $(a^s)^t=a^{st}$;

4) $(ab)^s=a^s\cdot a^s$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^s=\frac{a^s}{b^s}$;

6) если $0<a<b$, то $a^s<b^s$ при $s>0$ и $a^s>b^s$ при $s<0$;

7) если $s>t$, то $a^s>b^t$ при $a>a^t$ и $a^s<a^t$ при $0<a<1$.

Перечисленные свойства доказываются исходя из определения степени с рациональным показателем, свойств корней и свойств степени с целым показателем.

***Пример 3***

Докажем свойство 1.

Пусть $S=\frac{m}{n}$ и $t=\frac{k}{l}$, где $n$ и $l$ – натуральные числа, $m$ и $k$ – целые. Тогда получаем: $a^s\cdot a^t=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[l]{a^k}=\sqrt[ln]{a^{ml}}\cdot\sqrt[ln]{a^{nk}}\cdot\sqrt[ln]{a^{ml+nk}}=$
$=a^{\frac{ml+nk}{nl}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}=a^{s+t}$.

Аналогично доказывают свойства 2–5.

***Пример 4***

Докажем свойство 6.

Запишем число $S>0$ в виде $S=\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ – натуральные числа. Из неравенства $0<a<b$ и свойств степени с целым показателем следует, что $a^m<b^m$. По свойству корней из такого неравенства получаем: $\sqrt[n]{a^m}<\sqrt[n]{b^m}$ или $a^{\frac{m}{n}}<b^{\frac{m}{n}}$ или $a^s<b^s$.

Случай $S<0$ рассматривается аналогично.

Обсудим применение приведенных свойств.

***Пример 5***

Вычислим выражение $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$.

Используя свойства степени с рациональным показателем, запишем выражение в виде $(3^{-1})^{-10}\cdot(3^3)^{-3}+(5^{-1})^{-4}\cdot(5^2)^{-2}+\left((2^6)^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}=$
$=3^{10}\cdot 3^{-9}+5^4\cdot 5^{-4}+2^2=3^1+5^0+4=3+1+4=8.$

***Пример 6***

Упростим выражение $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a+b+\sqrt{ab}}$.

Перейдем к рациональным показателям степени и получим:

$$\frac{a\cdot a^{\frac{1}{2}}-b\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}=\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}=a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

***Пример 7***

Вычислим выражение $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}\right)}{(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}):\sqrt[3]{xy}}\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$.

Используем определение рационального показателя степени и свойства степеней. Имеем: $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{4}{3}}-8yx^{\frac{1}{3}}\right):x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\left(2-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)$. Для удобства введем новые переменные $a=x^{\frac{1}{3}}$ и $b=y^{\frac{1}{3}}$ и получим:

$$\frac{(a^2+2ab+4b^2)}{(a^4-8ab^3):ab}\left(2-\frac{a}{b}\right)=\frac{(a^2+2ab+4b^2)ab(2b-a)}{a(a^3-8b^3)b}=$$

$$=\frac{(a^2+2ab+4b^2)(2b-a)}{(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)}=-1.$$

В этом примере оказалось целесообразным использование новых переменных, т. к. это сразу позволило перейти к выражению с натуральными показателями степени, с которым удобнее проводить преобразования.

***Пример 8***

Сравним числа $\sqrt[4]{27}$ и $3^{\frac{4}{5}}$.

Число $\sqrt[4]{27}$ запишем в виде степени с рациональным показателем $\sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{4}}$. Так как $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, то по последнему свойству степеней $3^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{4}{5}}$ или $\sqrt[4]{27} > 3^{\frac{4}{5}}$.

**III. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение степени числа с рациональным показателем.
2. В каком случае определена степень числа 0?
3. Перечислите основные свойства степеней числа (фронтальный опрос).

**IV. Задание на уроке**

§ 37, № 1 (а, б); 2 (г); 5 (в, г); 7 (а, б); 9; 14 (а, в); 19 (в, г); 24 (а, г); 26 (б); 27 (а, б); 28 (в, г); 30 (а, б); 32 (а); 33 (б).

**V. Задание на дом**

§ 37, № 1 (в, г); 2 (а); 6 (б, в); 7 (в, г); 10; 14 (б, г); 19 (а, б); 24 (б, в); 26 (г); 27 (в, г); 29 (б); 30 (в, г); 32 (б); 33 (а).

**VI. Подведение итогов урока**

# Урок 17. Степенные функции, их свойства и графики

***Цели***: обобщить понятие степенной функции; рассмотреть свойства и графики таких функций.

## Ход урока

**I. Сообщение темы и целей урока**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (тест).

**Вариант 1**

1. Найдите значение выражения: $81^{0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

*Ответы*: а) 32; б) $3\frac{1}{27}$; в) 12; г) $2\frac{1}{9}$.

2. Упростите выражение: $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^2$.

*Ответы*: а) $4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$; б) $2\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)$; в) $2y^{\frac{2}{3}}$; г) $2x^{\frac{2}{3}}$.

3. Сократите дробь: $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$.

*Ответы*: а) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; б) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; в) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$; г) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2$.

**Вариант 2**

1. Найдите значение выражения: $27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}-\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

*Ответы*: а) 10; б) $12\frac{1}{5}$; в) $11\frac{2}{4}$; г) 12.

2. Упростите выражение: $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

*Ответы*: а) $-4a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}$; б) $2a^{\frac{1}{2}}$; в) $2\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $2b^{\frac{1}{2}}$.

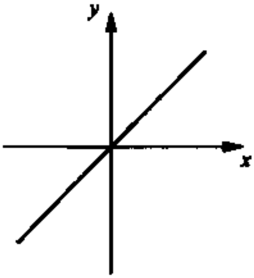
3. Сократите дробь: $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$.

*Ответы*: а) $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$; б) $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$; в) $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^2$; г) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

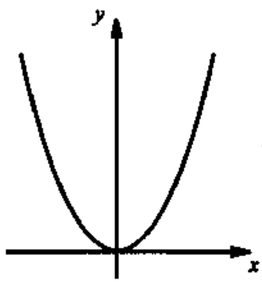
**III. Изучение нового материала**

**Функции вида $y = x^r$ (где $r$ – любое действительное число (в том числе и иррациональное)) называют степенными функциями. Пока будем рассматривать только рациональные показатели $r$. Многие такие функции изучались ранее. Если $r$ – натуральное число ($r = n$), то получаем функцию $y = x^n$. При $n$ = 1; 2; 3 получаем графики прямой ($n$ = 1), параболы ($n$ = 2) и кубической параболы ($n$ = 3). График степенной функции $y = x^n$ в случае четного $n$ ($n$ = 4, 6, 8) похож на пара-**

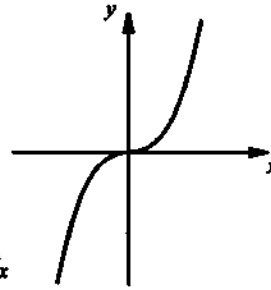
болу ($y = x^2$), а в случае нечетного $n$ ($n = 5, 7, 9, \ldots$) – на кубическую параболу ($y = x^3$).



$n = 1$



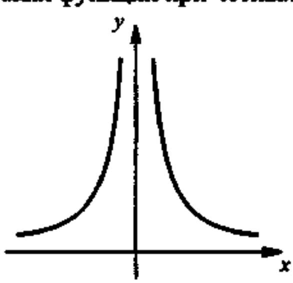
$n = 2$



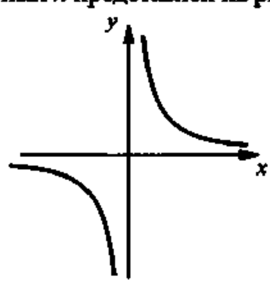
$n = 3$

Если $r = -n$, то получаем степенную функцию $y = x^{-n}$ или $y = \dfrac{1}{x^n}$.

Вид таких функций при четных и нечетных $n$ представлен на рисунке.



$n$ – четное



$n$ – нечетное

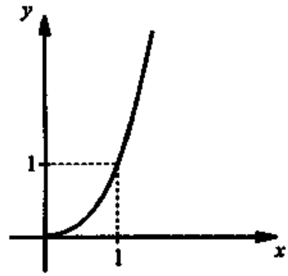
При $r = 0$ имеем функцию $y = x^0$ или $y = 1$ (где $x \neq 0$). Графиком такой функции является горизонтальная прямая $y = 1$ с выколотой точкой $x = 0$ ($x > 0$).

Рассмотрим теперь степенные функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ с рациональными показатели степени. Их свойства и графики существенно зависят от показателя степени $\dfrac{m}{n}$.

**Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ для $\dfrac{m}{n} > 1$**

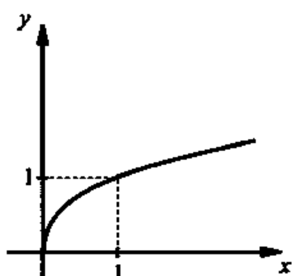
1. Область определения $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Определенной четности не имеет.
3. Возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. Наименьшее значение $y_{наим} = 0$, наибольшего значения не имеет.

6. Непрерывна.
7. Область значений $E(f) = [0; +\infty)$.
8. Выпукла вниз.



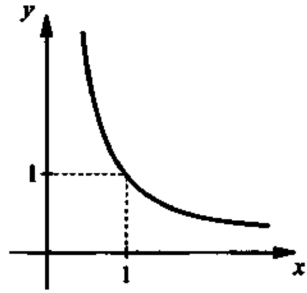

**Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ для $0 < \frac{m}{n} < 1$**

1. Область определения $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Определенной четности не имеет.
3. Возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. Наименьшее значение $y_{наим} = 0$, наибольшего значения не имеет.
6. Непрерывна.
7. Область значений $E(f) = [0; +\infty)$.
8. Выпукла вверх.




**Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ для $\frac{m}{n} < 0$**

1. Область определения $D(f) = (0; +\infty)$.
2. Определенной четности не имеет.
3. Убывает на промежутке $(0; +\infty)$.
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. Наименьшего и наибольшего значений не имеет.
6. Непрерывна.
7. Область значений $E(f) = (0; +\infty)$.
8. Выпукла вниз.




Наконец обсудим производную степенной функции.

**Теорема** (без доказательств). Если $x > 0$ и $r$ – любое рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ вычисляется по формуле $y' = rx^{r-1}$.

***Пример 1***

Найдем производную функцию:

а) $y = 3x^{\frac{2}{3}} : y' = 3 \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{-\frac{1}{3}}$;

б) $y = 7x^{-\frac{4}{7}} : y' = 7 \cdot \left(x^{-\frac{4}{7}}\right)' = 7 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) x^{-\frac{11}{7}} = -4x^{-\frac{11}{7}}$;

в) $y = 8(6x-5)^{\frac{5}{8}} : y' = 8 \cdot \left((6x-5)^{\frac{5}{8}}\right)' = 8 \cdot 6 \cdot \frac{5}{8}(6x-5)^{-\frac{3}{8}} = 30(6x-5)^{-\frac{3}{8}}$.

При этом было использовано правило дифференцирования $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$.

***Пример 2***

Исследуем функцию $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ на монотонность и экстремумы и построим ее график.

1. Найдем производную данной функции: $y' = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)' =$

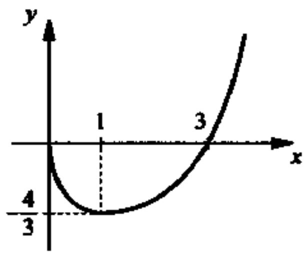
$$= \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - 2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Функция существует при $x \geq 0$, производная существует при $x > 0$. Поэтому критических точек у функции нет. Стационарную точку найдем из условия $y' = 0$ или $\dfrac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$, откуда $x = 1$.

3. Очевидно, что при $x \in (0; 1]$, значение $y' \leq 0$ и функция $y(x)$ убывает на этом промежутке. При $x \in [1; +\infty)$ значение $y' \geq 0$ и функция $y(x)$ возрастает. В точке $x = 1$ функция $y(x)$ имеет минимум $y_{\min} = \dfrac{2}{3} - 2 = -\dfrac{4}{3}$.

4. График функции $y(x)$ пересекает ось абсцисс в точке, которая является решением уравнения $0 = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ или $0 = \dfrac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}(x-3)$, откуда $x = 0$ или $x = 3$.

5. Построим график функции $y(x)$.




***Пример 3***

Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$ на:

а) отрезке $[0; 27]$; б) интервале $(0; 27)$; в) отрезке $[8; 27]$.

1. Найдем производную данной функции: $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = $

$= \dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)$.

2. Функция существует при $x \geq 0$, производная существует при $x > 0$. Поэтому критических точек у функции нет. Стационарную точку найдем из условия $y' = 0$ или $\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right) = 0$, откуда $x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$ и $x = 1$.

3. При $x \in (0; 1]$ значение $y' \geq 0$ и функция $y(x)$ убывает на этом промежутке. При $x \in [1; +\infty)$ значение $y' = 0$ и функция $y(x)$ возрастает. В точке $x = 1$ функция $y(x)$ имеет минимум $y_{\min} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

а) Найдем значения функции на концах промежутка $[0; 27]$. $y(0) = 0$, $y(27) = \frac{1}{2} \cdot 27^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$. Точка минимума лежит на данном промежутке, и $y_{\min} = y(1) = -\frac{1}{2}$. Тогда наименьшее значение функции на отрезке $y_{\text{наим}} = y(1) = -\frac{1}{2}$, наибольшее значение $y_{\text{наиб}} = y(27) = \frac{3}{2}$.

б) Так как концы промежутка 0 и 27 интервалу (0; 27) не принадлежат, то функция $y(x)$ наибольшего значения не имеет. Точка $x = 1$ лежит на данном интервале, и наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = y(1) = -\frac{1}{2}$.

в) На промежутке [8; 27] функция $y(x)$ возрастает. Поэтому наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = y(8) = \frac{1}{2} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - 8^{\frac{1}{3}} = 0$ и наибольшее значение $y_{\text{наиб}} = y(27) = \frac{3}{2}$.

***Пример 4***

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = (3x-2)^{\frac{1}{3}}$ в точке $a = 1$.

Напомним общий вид уравнения касательной: $y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$.

1. Найдем значение функции: $f(a) = (3 \cdot 1 - 2)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} = 1$.

2. Найдем производную функции: $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (3x-2)^{-\frac{2}{3}} = (3x-2)^{-\frac{2}{3}}$ и ее значение $f'(1) = 1$.

3. Подставим значения $f(a)$, $f'(a)$ и $a$ в уравнение касательной и получим: $y = 1 + 1 \cdot (x - 1)$ или $y = x$.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Определение степенной функции $y = x^r$.

2. Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ и ее график для: а) $\frac{m}{n} > 1$; б) $0 < \frac{m}{n} < 1$; в) $\frac{m}{n} < 0$.

3. Производная степенной функции.

**V. Задание на уроке**

§ 38, № 3 (а); 7; 11; 12 (а, г); 15 (б); 17; 20 (а, б); 26 (а, в); 27 (в, г); 28 (б); 30 (а, б); 31 (а); 32 (г); 33 (а); 39 (б).

**VI. Задание на дом**

§ 38, № 3 (б); 8; 10; 12 (б, в); 15 (в); 18; 21 (в, г); 26 (б, г); 27 (а, б); 28 (г); 30 (в, г); 31 (б); 32 (а); 33 (б); 39 (а).

**VII. Подведение итогов урока**

## Уроки 18–19. Зачетная работа по теме «Степени и корни. Степенные функции»

***Цель***: проверка знаний учащихся по вариантам одинаковой сложности.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Характеристика зачетной работы**

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся возрастает возможность выбора задач. Все задания разбиты на три блока А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка 3 ставится за 6 баллов, оценка 4 – за 10 баллов, оценка 5 – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного задания можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

## III. Варианты зачетной работы

### Вариант 1

**А**

1. Вычислите значение числового выражения $\sqrt[3]{125}-2\sqrt[4]{0,0625}$.

2. Расположите числа $\pi$, $\sqrt[3]{-18}$, 3, $\sqrt[4]{67}$ в порядке возрастания.

3. Найдите области определения и значений функции $y=2\sqrt[4]{2x-6}+1$.

4. Постройте график функции $y=\sqrt{x+1}-1$.

5. Определите число решений системы уравнений $\begin{cases} y=\sqrt[4]{x}, \\ 5y+2x=7. \end{cases}$ Найдите эти решения.

6. Упростите выражение $5\sqrt[4]{x}+\sqrt{xy}-\sqrt[4]{81x^2y^2}+\sqrt[8]{x^2}$.

7. Найдите производную функции $y=2\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

**В**

8. Найдите значение выражения $\sqrt{21+4\sqrt{17}}+\sqrt{21-4\sqrt{17}}$.

9. Упростите выражение $\left(\frac{x\sqrt{x}-8}{x-4}-\frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right):\left(1-\frac{4}{\sqrt{x}+2}\right)$.

10. Решите уравнение $(x^2+6x+5)\sqrt{x+2}=0$.

11. Постройте график функции $y=\sqrt[4]{\frac{x^2-3x+2}{x-1}}-1$.

**С**

12. Даны две функции: $f(x)=\sqrt[5]{\frac{x-4}{x-1}}$ и $g(x)=\frac{4-x^5}{1-x^5}$. Докажите тождество $f(g(x))=g(f(x))$ и найдите значение выражения $f(g(2))$.

13. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-4}=3$.

14. Прямая касается графика функции $f(x)=\sqrt[3]{3x-5}$ и проходит через точку $\left(-\frac{11}{3};\,0\right)$. Найдите координаты точки пересечения этой прямой с осью ординат.

### Вариант 2

**А**

1. Вычислите значение числового выражения $\sqrt[4]{256}-4\sqrt[3]{0,125}$.

2. Расположите числа $\frac{\pi}{2}$, $\sqrt[3]{-17}$, 2, $\sqrt[6]{71}$ в порядке возрастания.

3. Найдите области определения и значений функции $y=4\sqrt[6]{3x-6}+2$.

4. Постройте график функции $y=\sqrt{1-x}-1$.

5. Определите число решений системы уравнений $\begin{cases} y=\sqrt[6]{x}, \\ 3x+5y=8. \end{cases}$ Найдите эти решения.

6. Упростите выражение $3\sqrt{xy}+8\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{625x^2y^2}-2\sqrt[8]{x^2}$.

7. Найдите производную функции $y=3\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}$.

**B**

8. Найдите значение выражения $\sqrt{18-4\sqrt{14}}+\sqrt{18+4\sqrt{14}}$.

9. Упростите выражение $\left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x-1}+\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)$.

10. Решите уравнение $(x^2+8x+15)\sqrt{x+4}=0$.

11. Постройте график функции $y=\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+4}{x-4}}-2$.

**C**

12. Даны две функции: $f(x)=\sqrt[5]{\frac{x-5}{x-3}}$ и $g(x)=\frac{5-3x^5}{1-x^5}$. Докажите тождество $f(g(x))=g(f(x))$ и найдите значение выражения $f(g(-2))$.

13. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x-10}=1$.

14. Прямая касается графика функции $f(x)=\sqrt[3]{4x+3}$ и проходит через точку $\left(-\frac{15}{4};\ 0\right)$. Найдите координаты точки пересечения этой прямой с осью ординат.

**Вариант 1**

***Ответы***

1. 4.

2. $\sqrt[3]{-18}$, $\sqrt[6]{67}$, 3, $\pi$.

3. $D(y)=[3;+\infty)$, $E(y)=[1;+\infty)$.

4. График построен.

5. Одно решение (1; 1).

6. $6\sqrt[4]{x}-2\sqrt{xy}$.

7. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

8. $2\sqrt{17}$.

9. $\sqrt{x}-2$.

10. $x_1=-2$ и $x_2=-1$.

11. График построен.

***Решения***

12. Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимообратные. По свойству таких функций $f(g(x))=g(f(x))=x$. Так как обычно такого свойства не помнят, то вычислим значения данных функций непосредственно:

$$f(g(x))=\sqrt[5]{\frac{\dfrac{4-x^5}{1-x^5}-4}{\dfrac{4-x^5}{1-x^5}-1}}=\sqrt[5]{\frac{4-x^5-4+4x^5}{1-x^5-1+x^5}}=\sqrt[5]{\frac{3x^5}{3}}=\sqrt[5]{x^5}=x;$$

$$g(f(x))=\frac{4-\dfrac{x-4}{x-1}}{1-\dfrac{x-4}{x-1}}=\frac{4x-4-x+4}{x-1-x+4}=\frac{3x}{3}=x.$$ Таким образом, тождество доказано и $f(g(2))=2$.

*Ответ*: тождество доказано, $f(g(2))=2$.

13. Введем новые переменные $a=\sqrt[3]{x+5}$ и $b=\sqrt[3]{x-4}$. Получаем первое уравнение: $a-b=3$. Возведем в куб переменные $a$ и $b$: $a^3=x+5$ и $b^3=x-4$. Вычтем эти выражения и получим второе уравнение: $a^3-b^3=9$, или $(a-b)(a^2+ab+b^2)=9$, или $a^2+ab+b^2=3$.

Имеем систему двух уравнений: $\begin{cases}a-b=3,\\a^2+ab+b^2=3.\end{cases}$ Из первого уравнения выразим $a=b+3$ и подставим во второе уравнение. Получаем квадратное уравнение: $(b+3)^2+(b+3)b+b^2=3$ или $b^2+3b+2=0$, корни которого $b_1=-1$ и $b_2=-2$. Учтем, что $x=b^3+4$ и найдем $x_1=3$ и $x_2=-4$.

*Ответ*: $x_1=3$ и $x_2=-4$.

14. Напишем уравнение касательной. Найдем производную функцию $f(x)=\sqrt[3]{3x-5}=(3x-5)^{\frac{1}{3}}$ и получим: $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot(3x-5)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3=$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$. Предположим, что касание происходит в точке $x=a$.

Получаем уравнение касательной: $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3a-5)^2}}(x-a)+\sqrt[3]{3a-5}$

или $y=\dfrac{x+2a-5}{\sqrt[3]{(3a-5)^2}}$. Для нахождения величины $a$ учтем, что касательная проходит через точку $\left(-\dfrac{11}{3};0\right)$. Получаем уравнение:

$0=\dfrac{-\frac{11}{3}+2a-5}{\sqrt[3]{(3a-5)^2}}$ или $0=-\dfrac{11}{3}+2a-5$, откуда $a=\dfrac{13}{3}$. Тогда уравнение касательной имеет вид: $y=\dfrac{x+\frac{26}{3}-5}{\sqrt[3]{(13-5)^2}}$ или $y=\dfrac{x+\frac{11}{3}}{4}$. Подставим значение $x=0$ и найдем точку пересечения касательной с осью ординат: $y=\dfrac{11}{12}$. Таким образом, координаты этой точки $\left(0;\dfrac{11}{12}\right)$.

*Ответ*: $\left(0;\dfrac{11}{12}\right)$.

**Вариант 2**

***Ответы***

1. 2.
2. $\sqrt[3]{-17}, \dfrac{\pi}{2}, 2, \sqrt[6]{71}$.
3. $D(y)=[2;+\infty)$, $E(y)=[2;+\infty)$.
4. График построен.
5. Одно решение (1; 1).
6. $6\sqrt[4]{x}-2\sqrt{xy}$.
7. $y'=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$.
8. $2\sqrt{14}$.
9. $\sqrt{x}+1$.
10. $x_1=-4$ и $x_2=-3$.
11. График построен.

***Решения***

12. Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимообратные. По свойству таких функций $f(g(x))=g(f(x))=x$. Так как обычно такого свойства не помнят, то вычислим значения данных функций непосредственно:

$$f(g(x))=\sqrt[5]{\frac{\frac{5-3x^5}{1-x^5}-5}{\frac{5-3x^5}{1-x^5}-3}}=\sqrt[5]{\frac{5-3x^5-5+5x^5}{5-3x^5-3+3x^5}}=\sqrt[5]{\frac{2x^5}{2}}=\sqrt[5]{x^5}=x;$$

$$g(f(x))=\frac{5-3\frac{x-5}{x-3}}{1-\frac{x-5}{x-3}}=\frac{5x-15-3x+15}{x-3-x+5}=\frac{2x}{2}=x.$$ Таким образом, тождество доказано и $f(g(-2))=-2$.

*Ответ*: тождество доказано, $f(g(-2))=-2$.

13. Введем новые переменные $a=\sqrt[3]{x-3}$ и $b=\sqrt[3]{x-10}$. Получаем первое уравнение: $a - b = 1$. Возведем в куб переменные $a$ и $b$: $a^3 = x - 3$ и $b^3 = x - 10$. Вычтем эти выражения и получим второе уравнение: $a^3 - b^3 = 7$, или $(a-b)(a^2+ab+b^2)=7$, или $a^2+ab+b^2=7$.

Имеем систему двух уравнений: $\begin{cases} a-b=1, \\ a^2+ab+b^2=7. \end{cases}$ Из первого уравнения выразим $a = b + 1$ и подставим во второе уравнение. Получаем квадратное уравнение: $(b+1)^2+(b+1)b+b^2=7$ или $b^2+b-2=0$, корни которого $b_1 = -2$ и $b_2 = 1$. Учтем, что $x = b^3 + 10$, и найдем $x_1 = 2$ и $x_2 = 11$.

*Ответ*: $x_1 = 2$ и $x_2 = 11$.

14. Напишем уравнение касательной. Найдем производную функцию $f(x)=\sqrt[3]{4x+3}=(4x+3)^{\frac{1}{3}}$ и получим: $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot(4x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4=$

$=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(4x+3)^2}}$. Предположим, что касание происходит в точке $x = a$.

Получаем уравнение касательной: $y=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(4a+3)^2}}(x-a)+\sqrt[3]{4a+3}$

или $y=\dfrac{4x+8a+9}{3\sqrt[3]{(4a+3)^2}}$. Для нахождения величины $a$ учтем, что касательная проходит через точку $\left(-\frac{19}{4}; 0\right)$. Получаем уравнение: $0=\frac{-19+8a+9}{3\sqrt[3]{(4a+3)^2}}$ или $0 = -19 + 8a + 9$, откуда $a=\frac{5}{4}$. Тогда уравнение касательной имеет вид: $y=\frac{4x+10+9}{3\sqrt[3]{(5+3)^2}}$ или $y=\frac{4x+9}{12}$. Подставим значение $x = 0$ и найдем точку пересечения касательной с осью ординат: $y=\frac{3}{4}$. Таким образом, координаты этой точки $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

*Ответ*: $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

# Глава 7. Показательная и логарифмическая функции

## Уроки 20–21. Показательная функция, ее свойства и график

***Цель***: рассмотреть показательную функцию, ее свойства и график.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Изучение нового материала**

Ранее было определено понятие степени числа с целым и рациональным показателями. Определим теперь степень числа с иррациональным показателем, и тогда степень числа будет определена для произвольного действительного показателя.

***Пример 1***

Обсудим, что понимается под числом $3^{\sqrt{2}}$. Число $r=\sqrt{2}$ является иррациональным числом и может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби:

$r=\sqrt{2}=1{,}414213...=a_1,\ a_2, a_3, a_4,..., a_n...,$

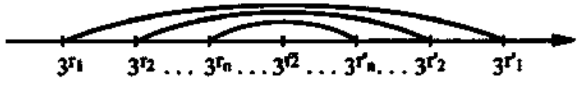
где $a_1$ и $a_1$, $a_3$, $a_4$, …, $a_n$, … – цифры целой и дробной части числа соответственно.

Очевидно, что $r_n < r < r'_n$, где $r_n = a_1, a_2, a_3, a_4, ..., (a_n+1)$ – рациональное приближение числа $r$ с избытком. Например, для $r=\sqrt{2}$ эти приближения равны (соответственно, для одной, двух, трех и т. д. значащих цифр): $r_n$: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421;

$r'_n$: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422;

Для $n$ значащих цифр разница между приближением $r'_n$ с избытком и приближением $r_n$ с недостатком число $r$ составляет величину $r'_n - r_n = 10^{-(n+1)}$ и уменьшается с увеличением числа значащих цифр. Это позволяет оценить иррациональное число $r$ **сколь угодно точно рациональными числами $r_n$, $r'_n$.**

Так как понятие степени с рациональным показателем было уже введено, то число $3^r$ удовлетворяет неравенству: $3^{r_n} < 3^r < 3^{r'_n}$.



С увеличением $n$ число $3^r$ может быть оценено **сколь угодно точно** числами $3^{r_n}$ и $3^{r'_n}$. При больших $n$ можно считать, что $3^r \approx 3^{r_n} \approx 3^{r'_n}$, что и считается **степенью числа с иррациональным показателем.**

Дадим точное определение степени с иррациональным показателем (заметим, что в школьном курсе это определение не приводится, но при учебе в вузе требуется).

**Определение 1. Степенью $a^r$** положительного числа $a(a > 0)$ **с иррациональным показателем $r$ называется предел числовой последовательности степеней этого числа с рациональными показателями $r_n$ или $r'_n$, являющимися $n$-значными приближениями числа $r$ по недостатку или избытку:**

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n}.$$

После введенного определения **степень числа с произвольным действительным показателем определена.**

***Пример 2***

а) $(\sqrt{2})^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = (-5)^0 = (0{,}0001)^0 = 1;$

б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8};$

в) $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{(-4)(-4)(-4)} = -\frac{1}{64};$

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{8}{27}};$

д) $\sqrt[5]{-243} = -3;$

е) $0^{\frac{5}{7}} = 0^{\sqrt{3}} = 0;$ $0^0,$ $0^{-\frac{5}{3}},$ $0^{-\sqrt{2}}$ – не определены;

ж) $1^{-\frac{1}{3}} = 1^0 = 1^{-\sqrt{3}} = 1^{2+\sqrt{2}} = 1;$

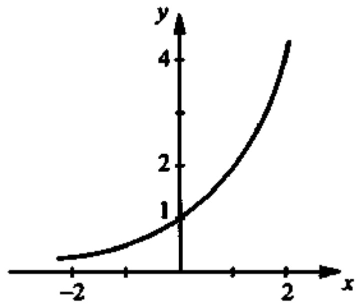
з) $r^{-\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} r^{-r_n} = \lim_{n\to\infty} 5^{-r'_n}$, где $r_n = \{1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots\}$, $r'_n = \{2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ \ldots\}$.

Теперь можно ввести понятие показательной функции.

**Определение 2. Функция, заданная формулой $y = a^x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$, $x$ – любое действительное число), называется показательной функцией с основанием $a$.**

**Составив таблицу значений показательной функции для различных значений аргумента, легко построить график такой функции. Приведем подобную таблицу и график функции $y = 2^x$.**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |




Перечислим основные **свойства показательной функции.**

1) **Область определения** – множество действительных чисел $(-\infty; +\infty)$.

2) Определенной **четности не имеет.**

3) **Монотонность**: при $0 < a < 1$ функция убывающая, при $a > 1$ функция возрастающая.

4) Функция **ограничена снизу** и **не ограничена сверху.**

5) Функция ни **наименьшего**, ни **наибольшего значений не имеет.**

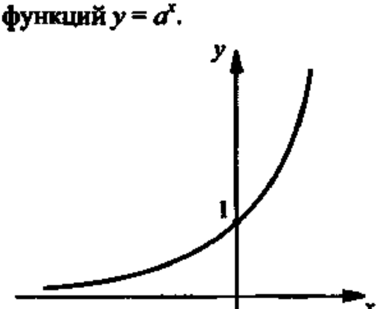
6) Функция **непрерывна.**

7) **Область значений** – множество всех положительных чисел $(0; +\infty)$.

8) **Выпукла вниз.**

На рисунках приведены графики функций $y = a^x$.


Для $0 < a < 1$




Для $a > 1$

Отметим, что показательную функцию $y = a^x$, а также ее график называют **экспонентой**. Прямая $y = 0$ (т. е. ось абсцисс) является горизонтальной асимптотой графика функции $y = a^x$ (т. е. для $0 < a < 1$ $x \to +\infty$ и для $a > 1$ $y \to 0$ при $x \to -\infty$). Для всех $a$ график функции $y = a^x$ пересекает ось ординат в точке (0; 1).

Рассмотренные свойства показательной функции позволяют решать значительный круг задач.

***Пример 3***

Сравним числа $2^{-3\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{5,6}$.

Второе число запишем в виде степени с основанием 2 и получим: $\left(\frac{1}{2}\right)^{5,6} = 2^{-5,6}$. Сначала сравним показатели степеней. Так как $\sqrt{5} \approx 2,2$, то $-3\sqrt{5} < -5,6$. Функция $y = 2^x$ является возрастающей. Поэтому большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Тогда имеем: $2^{-3\sqrt{5}} < 2^{-5,6}$ или $2^{-3\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{5,6}$, т. е. второе число больше.

***Пример 4***

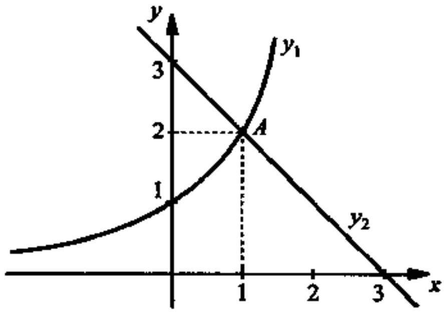
Сравним числа $x$ и $y$, если верно неравенство $\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)^{-x} > (0,6)^y$.

Используя свойство степеней, запишем первое число в виде $\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)^{-x} = \left(\sqrt{\frac{25}{9}}\right)^{-x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{x} = (0,6)^x$. Тогда данное неравенство имеет вид: $(0,6)^x > (0,6)^y$. Так как функция $(0,6)^x$ убывающая, то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака, т. е. $x < y$.

***Пример 5***

Графически решим уравнение $2^x = 3 - x$.

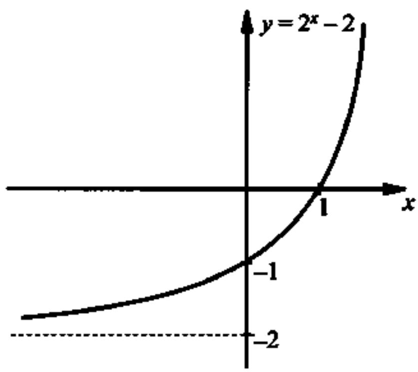
Построим графики показательной функции $y_1 = 2^x$ и линейной функции $y_2 = 3 - x$. Видно, что графики этих функций пересекаются в одной точке $A$, абсцисса которой $x = 1$ является решением данного уравнения (что легко проверяется подстановкой).




***Пример 6***

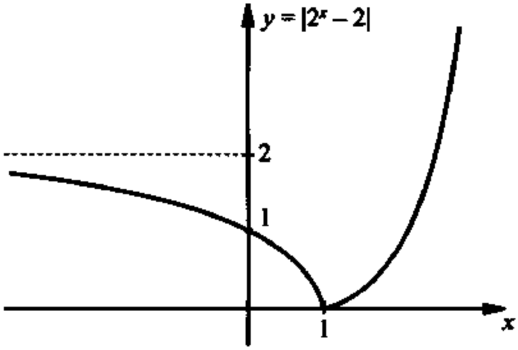
Построим график функции $y = |2^x - 2|$.

Сначала построим график функции $y = 2^x - 2$. Он получается смещением графика функции $y = 2^x$ на 2 единицы вниз.




Затем построим график функции $y = |2^x - 2|$.

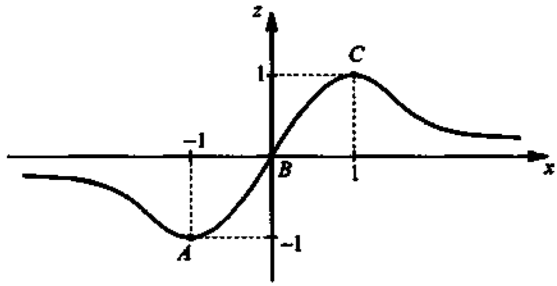
Для этого сохраняем часть предыдущего графика, для которой $y \geq 0$. Ту часть графика, для которой $y < 0$, отражаем вверх относительно оси абсцисс.



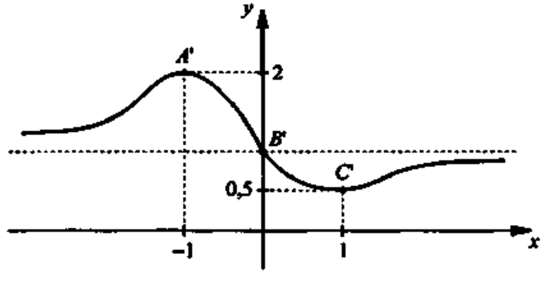
***Пример 7***

Построим график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x}{1+x^2}}$.

Данная функция является сложной $y=\left(\frac{1}{2}\right)^z$, где аргумент $z=\frac{2x}{1+x^2}$ является функцией переменной $x$. Поэтому сначала построим график функции $z(x)$, например используя производную. Учтем, что функция нечетная и ее график проходит через начало координат. Теперь перейдем к построению основного графика $y(x)$.




Как видно из графика, при $x \to \infty$ $z \to 0$ и $y \to \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$. Поэтому график функции $y(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$. Рассмотрим также точку минимума $A$ (для которой $x = -1$ и $z = -1$), тогда $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$. Строим точку $A'$ с координатами $x = -1$ и $y = 2$. Учтем точку $B$ с координатами $x = 0$ и $z = 0$, тогда $y=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$. Строим точку $B'$ с координатами $x = 0$ и $y = 1$. И наконец, рассмотрим точку $C$ (для которой $x = 1$ и $z = 1$), тогда $y=\left(\frac{1}{2}\right)^1=0,5$. Построим точку $C'$ с координатами $x = 1$ и $y = 0,5$. После изложенного строим окончательный график функции $y(x)$.



Отметим, что рассмотренные примеры основывались на свойствах показательных функций $y = a^x$, в первую очередь на свойстве **монотонности**. Сформулируем это свойство в виде, полезном при решении уравнений и неравенств.

**Теорема 1.** Равенство $a^t = a^S$ справедливо только при $t = S$.

**Теорема 2.** Если $a > 1$, то неравенство $a^t > a^S$ справедливо только при $t > S$, неравенство $a^t < a^S$ – только при $t < S$. Другими словами, неравенство $a^t \vee a^S$ выполнено, если **аргументы функций** $t$ **и** $S$ **связаны неравенством того же знака** $t \vee S$.

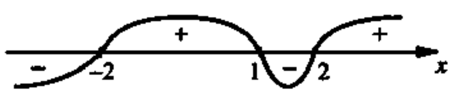
**Теорема 3.** Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^t > a^S$ справедливо только при $t < S$, неравенство $a^t < a^S$ – только при $t > S$. Другими словами, неравенство $a^t \vee a^S$ выполнено, если **аргументы функций** $t$ **и** $S$ **связаны неравенством противоположного знака** $t \wedge S$.

Разумеется, $t$ и $S$ могут быть и числами, и некоторыми функциями, зависящими от $x$.

***Пример 8***

Решим неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-x^2+4} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$.

Так как основание показательной функции $a = \frac{1}{3}$ удовлетворяет условию $0 < a < 1$, то по теореме 3 аргументы функций связаны неравенством противоположного знака: $x^3 - x^2 + 4 \leq 4x$. Решим это кубическое неравенство методом интервалов. Запишем его в виде: $x^3 - x^2 - 4x + 4 \leq 0$, или $x^2(x-1) - 4(x-1) \leq 0$, или $(x-1)(x^2-4) \leq 0$, или $(x-1)(x-2)(x+2) \leq 0$. Решение этого неравенства $x \in (-\infty; -2] \cup [1; 2]$.




На следующих уроках более детально будет рассмотрено решение показательных уравнений и неравенств.

Заметим, что показательные функции часто используются как математические модели реальных ситуаций в различных областях науки и отраслях техники.

**III. Контрольные вопросы**

1. Поясните понятие степени с иррациональным показателем.
2. Дайте определение показательной функции.
3. Приведите графики показательной функции.
4. Перечислите основные свойства показательной функции (фронтальный опрос).

5. Теоремы о показательных уравнениях и неравенствах (фронтальный опрос).

**IV. Задание на уроках**

§ 39, № 3 (а, б); 10 (б, г); 11; 14; 19 (а); 20 (в, г); 22 (а, б); 24 (в); 26; 29 (а); 30 (б); 31 (а, б); 36; 41 (в, г); 42 (а, г).

**V. Задание на дом**

§ 39, № 3 (в, г); 10 (а, в); 15; 19 (б); 20 (а, б); 22 (в, г); 24 (а); 27; 29 (б); 30 (в); 31 (в, г); 37; 41 (а, б); 42 (б, в).

**VI. Творческие задания**

Постройте график функции, уравнения или неравенства:

1) $y=2^{x-2}$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; 3) $y=2^x+1$; 4) $y=3^{-x}-2$; 5) $y=2^{|x|-1}$;

6) $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-2\right|$; 7) $|y|=3^x-3$; 8) $|y+2|\le 2^{\cos x}$; 9) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

10) $|y|\ge 2^{\cos x}$; 11) $\left|y+2^{\cos x}\right|<1$; 12) $\left|y-3^{\sin x}\right|\ge 1$.

**Указание:** используйте способы преобразования графиков функций и определение модуля.

**VII. Подведение итогов уроков**

## Уроки 22–24. Решение показательных уравнений и неравенств

*Цели*: систематизировать виды показательных выражений; рассмотреть способы решений уравнений, систем уравнений, неравенств.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и целей уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

**Вариант 1**

1. Найдите значение выражения $\frac{(5^{\sqrt{2}})^2\cdot 5^{1+\sqrt{2}}}{125^{\sqrt{2}}}$.

*Ответы*: а) 1; б) 25; в) 5; г) $\frac{1}{5}$.

2. Упростите выражение $\sqrt[3]{a\sqrt{a^2\sqrt{a}}}$.

*Ответы*: а) $a^{\frac{3}{4}}$; б) $a^{\frac{1}{3}}$; в) $a^{\frac{1}{4}}$; г) $a^{\frac{2}{3}}$.

3. Найдите область значений функции $y = 2\cdot 3^{\cos x} - 1$.

*Ответы*: а) $[-1; \infty)$; б) $\left[-\frac{1}{3}; 5\right]$; в) $[2; 5]$; г) $(0; \infty)$.

**Вариант 2**

1. Найдите значение выражения $\dfrac{(2^{\sqrt{3}})^3\cdot 2^{2-\sqrt{3}}}{4^{\sqrt{3}}}$.

*Ответы*: а) 1; б) 4; в) 2; г) $\frac{1}{4}$.

2. Упростите выражение $\sqrt{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

*Ответы*: а) $a^{\frac{3}{8}}$; б) $a^{\frac{1}{8}}$; в) $a^{\frac{15}{8}}$; г) $a^{\frac{3}{16}}$.

3. Найдите область значений функции $y = 3\cdot 2^{\sin x} + 1$.

*Ответы*: а) $\left[\frac{5}{2}; 7\right]$; б) $(0; \infty)$; в) $[1; 7]$; г) $\left[\frac{5}{2}; \infty\right]$.

**III. Изучение нового материала**

**Показательные уравнения**

**Показательным уравнением** называется уравнение, в котором **неизвестное $x$ входит только в показатели степени** при некоторых постоянных основаниях.

***Пример 1***

а) Уравнение $3^{x^2-2x}\cdot 5^{2-x} + 2^{\sqrt{1-x}} = 7^{x^3}$ показательное;

б) уравнение $3^{x^2-2x}\cdot 5^{2-x} + \sqrt{1-x} = 7^{x^3}$ не является показательным.

Рассмотрим систематику показательных выражений и способы решения уравнений. Так как показательная функция $a^x$ монотонна и ее область значений $(0; \infty)$, то простейшее показательное уравнение $a^x = b$ имеет единственный корень при $b > 0$. Именно к виду $a^x = b$ надо сводить более сложные уравнения.

**1. Простейшие уравнения**

***Пример 2***

Решим уравнение $4^{x^2+3x} = \frac{1}{16}$.

Правую часть уравнения представим в виде степени числа 4 и получим: $4^{x^2+3x} = 4^{-2}$. Так как равны степени числа 4, то равны и показатели степеней. Имеем квадратное уравнение $x^2+3x=-2$ или $x^2+3x+2=0$. Корни этого уравнения $x_1=-1$ и $x_2=-2$ являются и решениями данного уравнения.

**2. Уравнения, решаемые его преобразованиями**

***Пример 3***

Решим уравнение $5^{x+3}-3\cdot5^{x+1}-10\cdot5^x=4$.

Так как все слагаемые в левой части уравнения имеют вид $5^{x+a}$ (где $a$ – некоторое число), то вынесем общий множитель $5^x$ за скобки. Получаем: $5^x(5^3-3\cdot5-10)=4$ или $5^x\cdot100=4$. Разделим обе части уравнения на число 100. Имеем: $5^x=\frac{1}{25}$ или $5^x=5^{-2}$. Так как равны степени числа 5, то равны и показатели степеней. Тогда находим единственный корень данного уравнения $x=-2$.

**Вынесение общего множителя** за скобки можно использовать и при решении уравнений, содержащих **степени с двумя разными основаниями.**

***Пример 4***

Решим уравнение $9^x-2^{x+\frac{7}{2}}=2^{x+\frac{1}{2}}-3^{2x-1}$.

В данное уравнение входят числа 2 и 3 в различных степенях. Поэтому сгруппируем члены уравнения, содержащие степени числа 3, в левой части, а члены, содержащие степени числа 2, – в правой. Получаем: $9^x+3^{2x-1}=2^{x+\frac{1}{2}}+2^{x+\frac{7}{2}}$. В левой части вынесем за скобки общий множитель $3^{2x-1}$, в правой – общий множитель $2^{x+\frac{1}{2}}$. Имеем: $3^{2x-1}(3+1)=2^{x+\frac{1}{2}}(1+2^3)$, или $3^{2x-1}\cdot4=2^{x+\frac{1}{2}}\cdot9$, или $3^{2x-1}\cdot2^2=2^{x+\frac{1}{2}}\cdot3^2$. Разделим обе части этого уравнения на правую часть (очевидно, она не равна нулю): $\frac{3^{2x-1}\cdot2^2}{2^{x+\frac{1}{2}}\cdot3^2}=1$, или $\frac{9^{x-\frac{3}{2}}}{2^{x-\frac{3}{2}}}=1$, или $\left(\frac{9}{2}\right)^{x-\frac{3}{2}}=\left(\frac{9}{2}\right)^0$.

Так как равны степени числа $\frac{9}{2}$, то равны и показатели степеней: $x-\frac{3}{2}=0$, откуда $x=\frac{3}{2}$.

**3. Уравнения, решаемые разложением на множители**

Одним из наиболее распространенных преобразований является **разложение уравнения на множители.** В частности, оно используется **при различных основаниях** степеней.

***Пример 5***

Решим уравнение $2^{x+1}\cdot 3^{2x-1}\cdot 5^{x}=5400$.

Число 5400 разложим на простые множители: $5400 = 2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$. Тогда уравнение имеет вид: $2^{x+1}\cdot 3^{2x-1}\cdot 5^{x}=2^3\cdot 3^3\cdot 5^2$. Разделим обе части уравнения на его правую часть. Получаем или $2^{x-2}\cdot 3^{2x-4}\cdot 5^{x-2}=1$, или $(2\cdot 3^2\cdot 5)^{x-2}=1$, или $90^{x-2}=90^0$, тогда $x-2=0$ и $x=2$.

Разложение на множители также используется и в уравнениях, содержащих, помимо показательных функций, другие функции.

***Пример 6***

Решим уравнение $2\cdot 5^x\sin x+1=2\sin x+5^x$.

Перенесем все члены уравнения в левую часть, сгруппируем их и вынесем общие множители за скобки. Имеем: $2\cdot 5^x\sin x+1-2\sin x-5^x=0$, или $(2\cdot 5^x\sin x-2\sin x)+(1-5^x)=0$, или $2\sin x(5^x-1)-(5^x-1)=0$, или $(5^x-1)(2\sin x-1)=0$. Так как произведение двух множителей равно нулю, то один из них равен нулю. Получаем два уравнения:

а) $5^x-1=0$ или $5^x=5^0$, откуда $x=0$;

б) $2\sin x-1=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$, тогда $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=$ $=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in Z$.

**4. Уравнения, решаемые с помощью замены неизвестной**

Как и в уравнениях других видов, в случае показательных уравнений часто используется замена неизвестной.

***Пример 7***

Решим уравнение $3^{x+1}-8=3^{1-x}$.

Запишем данное уравнение в виде $3\cdot 3^x-8=\frac{3}{3^x}$ и введем новую неизвестную $t=3^x>0$. Получаем уравнение $3t-8=\frac{3}{t}$ или $3t^2-8t-3=0$.

Корни этого квадратного уравнения $t_1=3$ и $t_2=-\frac{1}{3}$ (не подходит, т. к. $t>0$). Получаем простейшее показательное уравнение $3^x=3$, решение которого $x=1$.

***Пример 8***

Решим уравнение $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$.

Учтем основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, тогда $2^{\cos^2 x} = 2^{1-\sin^2 x} = \frac{2}{2^{\sin^2 x}}$. Уравнение теперь имеет вид: $2^{\sin^2 x} + 4\cdot\frac{2}{2^{\sin^2 x}} = 6$. Введем новую неизвестную $t = 2^{\sin^2 x}$ и получим уравнение $t + \frac{8}{t} = 6$ или $t^2 - 6t + 8 = 0$. Корни этого квадратного уравнения $t_1 = 2$ и $t_2 = 4$. Вернемся к старой неизвестной $x$ и получим два уравнения:

а) $2^{\sin^2 x} = 2$, тогда $\sin^2 x = 1$ или $\sin x = \pm 1$. Решение этих уравнений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$;

б) $2^{\sin^2 x} = 4$, откуда $\sin^2 x = 2$. Это уравнение решений не имеет, т. к. функция синус ограниченна: $\sin x \le 1$ и $\sin^2 x \le 1$ – при всех $x$.

В ряде случаев для решения показательного уравнения приходится вводить **две новые переменные** и сводить уравнение к **однородному**.

***Пример 9***

Решим уравнение $3^{2(x+6)} + 3^{2x^2} - 2\cdot 3^{x^2+x+6} = 0$.

Запишем данное уравнение в виде $(3^{x+6})^2 + (3^{x^2})^2 - 2\cdot 3^{x+6}\cdot 3^{x^2} = 0$ и введем две новые неизвестные $a = 3^{x+6}$ и $b = 3^{x^2}$. Получаем однородное уравнение $a^2 + b^2 - 2ab = 0$ или $(a-b)^2 = 0$, откуда $a - b = 0$ или $a = b$. Вернемся к старой неизвестной $x$. Получаем уравнение $3^{x+6} = 3^{x^2}$. Так как равны степени числа 3, то равны и показатели степеней. Имеем квадратное уравнение: $x + 6 = x^2$ или $0 = x^2 - x - 6$, корни которого $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$.

**5. Уравнения, решаемые с помощью его специфики**

Название этого типа уравнений достаточно условно: при решении любого уравнения в той или иной степени учитывается его специфичность. Поэтому рассмотрим несколько примеров.

***Пример 10***

Решим уравнение $7^x + 24^x = 25^x$.

Легко угадать корень уравнения: $x = 2$. Действительно, при подстановке получаем верное равенство: $7^2 + 24^2 = 25^2$. Покажем, что других решений уравнение не имеет. Разделим все члены уравнения на его правую часть и получим: $\left(\frac{7}{25}\right)^x+\left(\frac{24}{25}\right)^x=1$. Очевидно, что функции $\left(\frac{7}{25}\right)^x$ и $\left(\frac{24}{25}\right)^x$ убывающие, т. к. их основания меньше 1. Сумма этих функций также является функцией убывающей. Поэтому по теореме о корне данное уравнение имеет единственное решение.

***Пример 11***

Решим уравнение $(x-2)^{x^2+2x}=(x-2)^{11x-20}$.

Данное уравнение не является показательным, т. к. неизвестная входит и в основание, и в показатель степени.

При решении уравнений вида $[f(x)]^{g(x)}=[f(x)]^{h(x)}$ необходимо помнить, что число $x_0$ будет корнем этого уравнения, если имеет место один из следующих **четырех случаев**:

а) $f(x_0)=-1$, а числа $g(x_0)$ и $h(x_0)$ – целые числа одинаковой четности;

б) $f(x_0)=0$, а числа $g(x_0)$ и $h(x_0)$ положительные;

в) $f(x_0)=1$, а функции $g(x)$ и $h(x)$ определены при $x=x_0$;

г) $g(x_0)=h(x_0)$, а функции $[f(x)]^{g(x)}$ и $[f(x)]^{h(x)}$ определены при $x=x_0$.

Рассмотрим все перечисленные выше случаи:

а) $x-2=-1$, т. е. $x=1$. При этом $x^2+2x=1^2+2\cdot1=3$ и $11x-20=$ $=11\cdot1-20=-9$, т. е. числа 3 и $-9$ – целые числа одинаковой четности и числа $(-1)^3$ и $(-1)^{-9}$ существуют и равны $-1$;

б) $x-2=0$, т. е. $x=2$. При этом $x^2+2x=2^2+2\cdot2=8$ и $11x-20=$ $=11\cdot2-20=2$, т. е. числа 8 и 2 положительные и числа $0^8$ и $0^2$ существуют и равны;

в) $x-2=1$, т. е. $x=3$. При этом $x^2+2x=3^2+2\cdot3=15$ и $11x-20=$ $=11\cdot3-20=13$, т. е. функции $x^2+2x$ и $11x-20$ при $x=3$ определены. Заметим, что числа $1^{15}$ и $1^{13}$ равны друг другу и равны 1;

г) $x^2+2x=11x-20$ или $x^2-9x+20=0$, т. е. $x_1=4$ и $x_2=5$.

При $x=4$ функции, входящие в уравнение, определены: $(4-2)^{4^2+2\cdot4}$ и $(4-2)^{11\cdot4-20}$ – и их значения равны друг другу и равны $2^{24}$. При $x=5$ функции также определены: $(5-2)^{5^2+2\cdot5}$ и $(5-2)^{11\cdot5-20}$ – и их значения равны $3^{35}$.

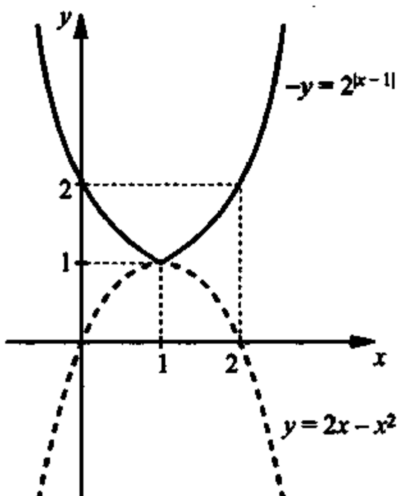
Итак, уравнение имеет пять корней: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$.

Обратимся теперь к задачам, для решения которых необходимо найти **области изменения функций**, входящих в уравнение.

***Пример 12***

Решим уравнение $2^{|x-1|} = 2x - x^2$.

Найдем области изменения функций $y = 2^{|x-1|}$ и $y = 2x - x^2$. Первая функция показательная с основанием $2 > 1$, и так как $|x - 1| \geq 0$, то $y \geq 2^0 = 1$. Вторая функция – парабола, направленная ветвями вниз, проходящая через точки $x = 0$ и $x = 2$. Максимум этой параболы достигается при $x = 1$ и равен $y = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$. При остальных $x$ $y \leq 1$. Таким образом, значения этих двух функций совпадают только при $x = 1$ и равны 1. Итак, $x = 1$ – корень уравнения. Полезно решение в простейших случаях, например в этом, иллюстрировать графическим решением (см. рисунок).



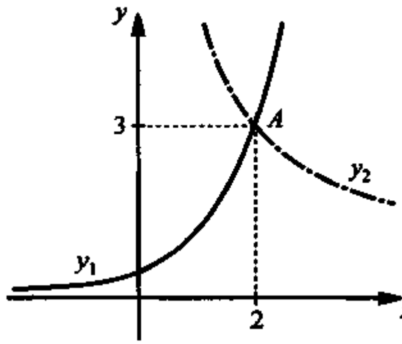

**6. Уравнения, решаемые графически**

При решении уравнений, содержащих показательные и другие функции, достаточно часто используется **графический способ**.

***Пример 13***

Решим уравнение $3^{x-1} = \frac{6}{x}$.

Построим графики функций $y_1 = 3^{x-1}$ и $y_2 = \frac{6}{x}$. Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке $A$, абсцисса которой $x = 2$ является решением данного уравнения.




**Показательные неравенства**

При решении **простейших показательных неравенств** $a^{f(x)} \vee b$ используется **монотонность** показательной **функции: при $0 < a < 1$** функция **убывающая, при $a > 1$ – возрастающая.** Поэтому при рассмотрении показателей степеней **в первом случае знак неравенства меняется на противоположный, во втором – сохраняется.**

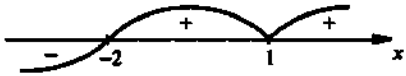
***Пример 14***

Решим неравенство $\sqrt[10]{2^{x^2 \cdot 14,5x}} < \frac{1}{8}$.

Запишем неравенство в виде $2^{\frac{x^2-14,5x}{10}} < 2^{-3}$. Так как основание 2 показательной функции больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: $\frac{x^2-14,5x}{10} < -3$ или $x^2 - 14,5 + 30 < 0$. Решение этого квадратного неравенства $x \in (2,5;\ 12)$.

***Пример 15***

Решим неравенство $(0,8)^{x^3-3x+4} \geq (0,8)^2$. Так как основание 0,8 показательной функции меньше 1 (показательная функция убывающая), то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака: $x^3 - 3x + 4 \leq 2$ или $x^3 - 3x + 2 \leq 0$. Разложим левую часть на множители: $(x-1)^2(x+2) \leq 0$ и решим это кубическое неравенство методом интервалов. Получаем решение: $x \in (-\infty; -2] \cup \{1\}$.




**При решении более сложных неравенств используются те же приемы, что и при решении аналогичных уравнений.**

***Пример 16***

Решим неравенство $\frac{1}{3^x+5} \le \frac{1}{3^{x+1}-1}$.

Введем новую неизвестную $t = 3^x > 0$ и получим рациональное неравенство: $\frac{1}{t+5} \le \frac{1}{3t-1}$, или $\frac{1}{t+5} - \frac{1}{3t-1} \le 0$, или $\frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)} \le 0$. Учтем, что $t > 0$, и решим это неравенство методом интервалов. Получаем: $t \in \left(\frac{1}{3}; 3\right]$. Вернемся к старой неизвестной. Имеем двойное неравенство $3^{-1} < 3^x \le 3$. Так как основание 3 степеней больше единицы, то показатели степеней связаны неравенствами того же знака: $-1 < x \le 1$ или $x \in (-1; 1]$.

***Пример 17***

Решим неравенство $(x-2)^{x^2-6x+8} \ge 1$.

ОДЗ неравенства $x \in (2; \infty)$. Запишем неравенство в виде $(x-2)^{x^2-6x+8} - 1 \ge 0$ и найдем корни соответствующего уравнения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$. Решая методом интервалов это неравенство с учетом ОДЗ, получаем: $x \in (2; 3] \cup [4; \infty)$.


**Системы показательных уравнений**

При решении систем показательных уравнений применяются те же способы, что и для решения показательных уравнений. Достаточно часто системы непосредственно сводятся к системам алгебраических уравнений.

***Пример 18***

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2^{3x^2+xy+y} = 0{,}5, \\ 3^{2x-y} = 81. \end{cases}$

Запишем данную систему уравнений в виде $\begin{cases} 2^{3x^2+xy+y} = 2^{-1}, \\ 3^{2x-y} = 3^4. \end{cases}$ Получаем систему алгебраических уравнений $\begin{cases}3x^2+xy+y=-1,\\2x-y=4.\end{cases}$ Из второго уравнения выразим $y = 2x - 4$ и подставим в первое. Имеем: $3x^2+x(2x-4)+2x-4=-1$ или $5x^2-2x-3=0$. Корни этого уравнения $x_1 = 1$ и $x_2=-\frac{3}{5}$. Найдем соответствующие значения $y_1 = -2$ и $y_2=-5\frac{1}{5}$. Итак, система уравнений имеет два решения: (1; –2) и $\left(-\frac{3}{5}; -5\frac{1}{5}\right)$.

Разумеется, при решении систем уравнений широко используется **замена неизвестных.**

***Пример 19***

Решим систему уравнений $\begin{cases}3^x+2\cdot 3^y=15,\\2^{2x-y}=8.\end{cases}$

Из второго уравнения найдем: $2x - y = 3$, откуда $y = 2x - 3$. Подставим это соотношение в первое уравнение и получим: $3^x + 2 \cdot 3^{2x-3} = 15$ или $3^x+\frac{2}{27}\cdot(3^x)^2=15$. Введем новую неизвестную: $t = 3^x > 0$. Имеем квадратное уравнение $t+\frac{2}{27}t^2=15$ или $2t^2+27t-405=0$, корни которого $t_1 = 0$ и $t_2 = -22{,}5$ (не подходит, т. е. $t > 0$). Возвращаясь к старым неизвестным, получаем уравнение $3^x = 9$, находим: $x = 2$ и $y = 1$.

***Пример 20***

Решим систему уравнений $\begin{cases}2\cdot 3^{x-1}+7\cdot 5^{y+1}=37,\\9^x+5^y=10.\end{cases}$

Систему уравнений запишем в виде $\begin{cases}\frac{2}{3}\cdot 3^x+35\cdot 5^y=37,\\(3^x)^2+5^y=10\end{cases}$ и введем новые переменные $a = 3^x$ и $b = 5^y$ (при этом $a, b > 0$). Получаем систему алгебраических уравнений $\begin{cases}\frac{2}{3}a+35b=37,\\a^2+b=10\end{cases}$ или $\begin{cases}2a+105b=111,\\a^2+b=10.\end{cases}$

Из второго уравнения выразим $b = 10 - a^2$ и подставим в первое. Имеем: $2a + 105(10 - a^2) = 111$ или $0 = 105a^2 - 2a - 939$. Корни этого квадратного уравнения $a_1 = 3$ и $a_2 = -\dfrac{313}{105}$ (не подходит, т. к. $a > 0$). Найдем $b = 10 - 3^2 = 1$. Вернемся к старым неизвестным. Получаем систему простейших показательных уравнений $\begin{cases} 3^x = 3, \\ 5^y = 1, \end{cases}$ откуда $x = 1$ и $y = 0$.

**IV. Задание на уроках**

§ 40, № 7 (а, б); 12 (в, г); 13 (а, в); 15 (б, г); 17 (а, б); 18 (а); 21 (б); 23 (а, б); 26 (в, г); 28 (б); 29 (а); 34 (а, б); 39 (а, в); 41 (б, г); 45 (а, в); 49 (а, б); 50 (а).

**V. Задание на дом**

§ 40, № 7 (в, г); 12 (а, б); 13 (б, г); 15 (а, в); 17 (в, г); 18 (б); 21 (а); 23 (в, г); 26 (а, б); 28 (г); 29 (б); 34 (в, г); 39 (б, г); 41 (а, в); 45 (б, г); 49 (в, г); 50 (б).

**VI. Творческие задания**

1. Решите показательное уравнение:

а) $2^{x+4} - 3 \cdot 5^x = 5^{x+1} - 4 \cdot 2^x$;

б) $5^{3x+1} - 4 \cdot 100^x = 5 \cdot 80^x - 4^{3x+1}$;

в) $x^2 \cdot 7^{\sqrt{2x+5}-2} + 25 \cdot 7^{x-1} = x^2 \cdot 7^{x-1} + \dfrac{25}{49} \cdot 7^{\sqrt{2x+5}}$;

г) $x^2 \cdot 3^{\sqrt{2x-1}-1} + 3^x = 3^{\sqrt{2x-1}+1} + x^2 \cdot 3^{x-2}$;

д) $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 34$;

е) $5(2 + \sqrt{3})^x - (2 - \sqrt{3})^x = 4$;

ж) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

з) $9 \cdot 4^x + 5 \cdot 6^x = 4 \cdot 9^x$;

и) $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}$;

к) $3 \cdot 5^{2x^2+6x-9} = 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} + 3^{2x^2+6x-9}$;

л) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + \left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 7$;

м) $\sqrt{x+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;

н) $(x-3)^{x^2-4x-5} = 1$;

о) $x^{x^2-5x-6}=1$;

п) $(\operatorname{tg}x)^{\sin x}=\sqrt{\operatorname{tg}x}$;

р) $(\sin 2x)^{\cos x}=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$;

с) $x\cdot 3^{\sin x}+2\sqrt{3}=\sqrt{3}x+2\cdot 3^{\sin x}$;

т) $9^{\cos^2 x}+3^{\cos 2x}=12\cdot 9^{\sin\cos x}$.

*Ответы*: а) 1; б) $\{0; -1\}$; в) $\{2; 5\}$; г) $\{3; 2+\sqrt{2}\}$; д) $\{-2; 2\}$; е) 0; ж) $\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$; з) 2; и) $\{1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\}$; к) $\{-4; 1\}$; л) $-1$; м) 0; н) $\{4; 5\}$; о) $\{1; 6\}$; п) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{\pi}{4}+\pi k; n,k\in Z\right\}$; р) $\left\{-\dfrac{2}{3}\pi+2\pi n; \dfrac{\pi}{4}+\pi k; n,k\in Z\right\}$; с) $\left\{2; (-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\right\}$; т) $\left\{\pi n; -\dfrac{\pi}{4}+\pi k; n,k\in Z\right\}$.

**2. Решите показательное неравенство:**

а) $9^x+25^x\le 2\cdot 15^x$;

б) $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{-\frac{1}{x}}<4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$;

в) $5^{|4x-6|}\ge 25^{3x-4}$;

г) $(0,6)^{|2x-5|}\ge (0,6)^{3x-1}$;

д) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}}\ge 125$;

е) $(0,2)^{\frac{2x-3}{x-2}}>5$;

ж) $(x^2-7x+12)(5^x-25)\ge 0$;

з) $(x^2-4x+3)(2^x-8)\le 0$;

и) $\sqrt{4^x-2^{x+3}+8}\ge\sqrt{3-2^{x+1}}$;

к) $\sqrt{2^x+3}-\sqrt{2^{x+1}-1}\le\sqrt{3\cdot 2^x-2}$;

л) $(x^2+x+1)^x<1$;

м) $(x^2-x+1)^x<1$.

*Ответы*: а) 0; б) $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$; в) $\left(-\infty; \dfrac{7}{5}\right]$; г) $\left[\dfrac{6}{5}; \infty\right)$; д) $(1; 4]$; е) $\left(\dfrac{5}{3}; 2\right)$; ж) $[2; 3]\cup[4; \infty)$; з) $(-\infty; 1]\cup\{3\}$; и) $(-\infty; 0]$; к) $[0; \infty)$; л) $(-\infty; -1)$; м) $(-\infty; 0)\cup(0; 1)$.

**3. Решите систему показательных уравнений:**

а) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=\dfrac{1}{9},\\ y-x=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2^y\cdot 5^{-x}=200,\\ x+y=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^{x-3y+1}=27,\\ 2^{2x+y+2}=32;\end{cases}$

г) $\begin{cases}5^{2x+y+2}=125,\\ 3^{x-2y+1}=\dfrac{1}{9};\end{cases}$

д) $\begin{cases} 2^{3xy-x^2+y^2-x}=256, \\ 3^{2x-y+1}=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5^{2xy+x^2-3y-2}=125, \\ 2^{x-2y+3}=8; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 4\cdot 5^{x-1}+0{,}1\cdot 2^{y+2}=4{,}2, \\ 25^x+2^y=25{,}5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 0{,}5\cdot 3^{x+1}+7{,}5\cdot 5^{y-1}=12, \\ 2\cdot 9^x+5^y=23; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2^{2x-2y}+2^{x-y}=2, \\ 2^{2x+1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2y-1}=5; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 3^{2x-2y}+2\cdot 3^{x-y}-3=0, \\ 3^x+3^{1-y}=4. \end{cases}$

*Ответы*: а) $(-2;\ 0)$; б) $(-2;\ 3)$; в) $\left(\dfrac{11}{7};\ -\dfrac{1}{7}\right)$; г) $\left(-\dfrac{1}{5};\ \dfrac{7}{5}\right)$; д) $(1;\ 2)$, $\left(-\dfrac{8}{9};\ -\dfrac{16}{9}\right)$; е) $(2;\ 1)$, $\left(-\dfrac{5}{4};\ -\dfrac{5}{8}\right)$; ж) $(1;\ -1)$; з) $(1;\ 1)$; и) $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2}\right)$; к) $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$.

**VII. Подведение итогов уроков**

## Урок 25. Понятие логарифма

*Цель*: рассмотреть понятие логарифма и простейшие свойства логарифмов.

### Ход урока

**I. Сообщение темы и цели урока**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Решите уравнение $2^{2x^2}-5\cdot 2^{x^2+2x}+4\cdot 2^{4x}=0$.

2. Решите неравенство $(0{,}3)^{\frac{x-2}{2x+1}}\geq 1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\cdot 3^{x-1}+3\cdot 5^{y+1}=81, \\ 3^{2x}+4\cdot 5^y=101. \end{cases}$

**Вариант 2**

1. Решите уравнение $3^{2x^2}-10\cdot3^{x^2+x}+9\cdot3^{2x}=0$.

2. Решите неравенство $(0,2)^{\frac{2x-1}{x+3}}\geq1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}3\cdot2^{x+1}+4\cdot3^{y-1}=24,\\3\cdot2^{2x}+3^{y}=21.\end{cases}$

**III. Изучение нового материала**

**Логарифм числа**

Понятие логарифма числа связано с решением показательных уравнений.

***Пример 1***

Остановимся на решении двух показательных уравнений. Решение уравнения $2^x = 64$ труда не вызывает. Так как $64 = 2^6$, то данное уравнение принимает вид: $2^x = 2^6$. Поэтому уравнение имеет единственное решение $x = 6$.

Теперь рассмотрим аналогичное уравнение $2^x = 63$. По теореме о корне это уравнение также имеет единственное решение. Однако в отличие от предыдущего уравнения это решение является иррациональным числом. Докажем это от противного. Предположим, что корень данного уравнения является числом рациональным, т. е. $x=\frac{m}{n}$ (где $m$ и $n$ – натуральные числа). Тогда выполняется равенство $2^{\frac{m}{n}}=63$ или $2^m = 63^n$. Но 2 в любой натуральной степени будет числом четным, а 63 в любой натуральной степени – числом нечетным. Получаем противоречие, которое и доказывает, что корень данного уравнения – число иррациональное.

Поэтому для обозначения такого корня приходится вводить новое понятие и новый символ – логарифм. Чуть забегая вперед, скажем, что корень уравнения $2^x = 63$ обозначается символом $x=\log_2 63$.

Остановимся теперь на понятии логарифма числа. Очень часто приходится решать задачу: известно, что $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$); необходимо найти показатель степени $x$, т. е. решать задачу, обратную возведению числа в степень. При нахождении этого показателя степени $x$ и возникает **понятие логарифма числа $b$ по основанию $a$** ($x=\log_a b$). Дадим теперь точное определение.

**Определение. Логарифмом числа $b$ ($b > 0$) по основанию $a$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести основание $a$, чтобы получить число $b$. Это число обозначается символом $\log_a b$ (т. е. по определению $a^{\log_a b} = b$).**

***Пример 2***

а) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$;

б) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$, так как $(\sqrt{2})^6 = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$;

в) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = -3$, так как $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$;

г) $\log_a 1 = 0$ $(a > 0, a \neq 1)$, так как $a^0 = 1$;

д) $\log_a a = 1$ $(a > 0, a \neq 1)$, так как $a^1 = a$;

е) $\log_2(-7)$, $\log_{(-4)} 5$, $\log_1 3$ – не определены.

***Пример 3***

Вычислим: а) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; б) $\log_a(a\sqrt{a\sqrt{a}})$ $(a > 0, a \neq 1)$.

а) Пусть данный логарифм равен $x$. Тогда по определению логарифма имеем показательное уравнение $(\sqrt{3})^x = \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$ или $3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{4}{3}}$, откуда $\frac{x}{2} = -\frac{4}{3}$ и $x = -\frac{8}{3}$. Итак, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} = -\frac{8}{3}$.

б) Обозначим данный логарифм буквой $x$. Тогда по определению логарифма получаем показательное уравнение $a^x = a\sqrt{a\sqrt{a}}$, или $a^x = a \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$, или $a^x = a^{1\frac{3}{4}}$, откуда $x = 1\frac{3}{4}$. Итак, $\log_a(a\sqrt{a\sqrt{a}}) = 1\frac{3}{4}$.

***Пример 4***

Решим уравнение: а) $\log_8(x^2 + x) = \frac{1}{3}$; б) $\log_{x-2} 25 = 2$.

а) По определению логарифма получаем квадратное уравнение $x^2 + x = 8^{\frac{1}{3}}$ или $x^2 + x - 2 = 0$, которое имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.

б) Используя определение логарифма, имеем уравнение $(x - 2)^2 = 25$. Так как $x - 2 > 0$ и $x - 2 \neq 1$, то получаем линейное уравнение $x - 2 = 5$, откуда $x = 7$.

**Простейшие свойства логарифмов**

Из определения логарифма следуют четыре его простейших свойства (докажите самостоятельно):

1) $\log_a a = 1$; 2) $\log_a 1 = 0$; 3) $\log_a a^c = c$; 4) $a^{\log_a b} = b$.

***Пример 5***

Вычислим: а) $\log_a(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a})$; б) $\log_a(\mathrm{tg}25°\cdot\mathrm{tg}45°\cdot\mathrm{tg}65°)$; в) $\log_{\sqrt{6}-2}(10-4\sqrt{6})$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_3 7}$.

а) Перейдем к рациональным показателям степени и запишем логарифмируемое выражение в виде степени числа $a$. Получаем: $\log_a(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a})=\log_a\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}\right)=\log_a a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\log_a a$. Тогда по свойству 1 имеем: $\log_a a=1$.

б) Используем формулу приведения $\mathrm{tg}65° = \mathrm{tg}(90° - 25°) = \mathrm{ctg}25°$ и учтем, что $\mathrm{tg}45° = 1$. Тогда логарифмируемое выражение равно $\mathrm{tg}25°\cdot\mathrm{tg}45°\cdot\mathrm{tg}65° = (\mathrm{tg}25°\cdot\mathrm{tg}65°)\cdot\mathrm{tg}45° = \mathrm{tg}25°\cdot\mathrm{ctg}25° = 1$. Поэтому по свойству 2 получаем: $\log_a 1 = 0$.

в) Запишем логарифмируемую величину $10-4\sqrt{6}$ в виде степени основания $\sqrt{6}-2$ логарифма. Получаем: $10-4\sqrt{6}=(\sqrt{6})^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot 2+2^2=$ $=(\sqrt{6}-2)^2$. Тогда по свойству 3 имеем: $\log_{\sqrt{6}-2}(10-4\sqrt{6})=$ $=\log_{\sqrt{6}-2}(\sqrt{6}-2)^2=2$.

г) Запишем основание степени $\frac{1}{3}$ в виде $3^{-1}$ и учтем свойства степеней. Используя свойство 4, получим: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_3 7}=(3^{-1})^{2\log_3 7}=$ $=3^{-2\log_3 7}=(3^{\log_3 7})^{-2}=7^{-2}=\frac{1}{49}$.

Заметим, что операцию нахождения логарифма числа называют **логарифмированием**. Операция логарифмирования и возведения в степень с соответствующим основанием **взаимообратны** по отношению друг к другу, т. к. $\log_a b = c$ и $a^c = b$ – одна и та же зависимость между числами $a$, $b$ и $c$. Например, сравните записи $\log_2 64 = 6$ и $2^6 = 64$.

Отметим, что логарифмы с двумя основаниями носят специальные названия и имеют специальные обозначения. Логарифм по основанию 10 называют **десятичным логарифмом** и обозначают символом lg (т. е. $\log_{10}b = \lg b$). Логарифм по основанию $e$ ($e \approx 2{,}718\ldots$) называют **натуральным** логарифмом и обозначают символом ln (т. е. $\log_e b = \ln b$).

**IV. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение логарифма числа *b* по основанию *a*.
2. Приведите и докажите простейшие свойства логарифмов.
3. Как соотносятся операции логарифмирования и возведения в степень?
4. Два особых вида и обозначения логарифмов.

**V. Задание на уроке**

§ 41, № 2 (а, б); 4 (в, г); 5 (а, в); 6 (б); 8 (а, б); 9 (в); 12 (а, в); 3 (а, б); 16 (б, г); 17 (а); 18 (а, б); 19 (в, г).

**VI. Задание на дом**

§ 41, № 2 (в, г); 4 (а, б); 5 (б, г); 6 (в); 8 (в, г); 9 (а); 12 (б, г); 13 (в, г); 16 (а, в); 17 (б); 18 (в, г); 19 (а, б).

**VII. Подведение итогов урока**

## Уроки 26–27. Функция $y = \log_a x$, ее свойства и график

***Цель***: рассмотреть логарифмическую функцию, ее свойства и график.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Вычислите: а) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{9\sqrt{3}}$; б) $2^{3+4\log_2 \frac{1}{3}}$.

2. Решите уравнение: а) $\log_9 (x-2) = \dfrac{1}{2}$; б) $\log_{x+3} 4 = 2$.

**Вариант 2**

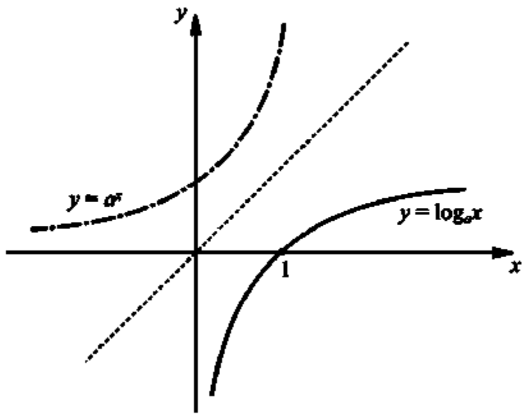
1. Вычислите: а) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{8\sqrt{2}}$; б) $3^{2+3\log_3 \frac{1}{2}}$.

2. Решите уравнение: а) $\log_{16} (x+3) = \dfrac{1}{2}$; б) $\log_{x-2} 9 = 2$.

## III. Изучение нового материала

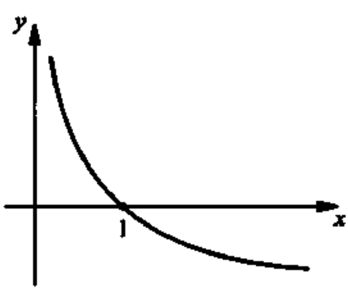
Как следует из предыдущего материала, показательная функция $y = a^x$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) **монотонна**, а значит, **обратима**. Выразим из этого равенства $x = \log_a y$. Поменяем местами $x$ и $y$ и получим: $y = \log_a x$. Таким образом, функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ являются **взаимообратными**. Функцию, заданную формулой $y = \log_a x$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$), называют **логарифмической функцией** с основанием $a$.

**Графики показательной и логарифмической функций**, имеющие одинаковое основание $a$ (как и любых взаимообратных функций) **симметричны относительной прямой** $y = x$. На рисунке приведены графики показательной и логарифмической функций, например, для случая $a > 1$.

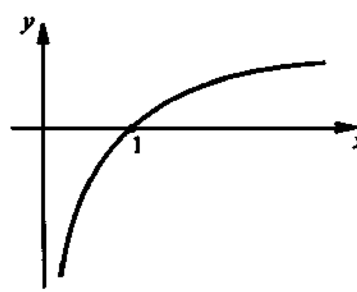



для $a > 1$

Приведем графики логарифмических функций $y = \log_a x$ для оснований $0 < a < 1$ и $a > 1$.




для $0 < a < 1$




для $a > 1$

Исходя из приведенных графиков, перечислим **основные** свойства логарифмической функции.

1) **Область определения** функции $D(f) = (0; +\infty)$.

2) Функция определенной **четности не имеет.**

3) Функция **убывающая при $0 < a < 1$ и возрастающая при $a > 1$.**

4) **Функция не ограничена.**

5) **Функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.**

6) **Функция непрерывна.**

7) **Область значений** функции $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

8) Функция **выпукла вниз при $0 < a < 1$** и **выпукла вверх при $a > 1$.**

Рассмотрим примеры использования свойств логарифмической функции.

***Пример 1***

Найдем область определения функции $y = \log_2(-x^2 + 2x + 3)$.

Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел $R_+$. Поэтому данная функция определена при всех $x$, для которых выполнено неравенство $-x^2 + 2x + 3 > 0$ или $x^2 - 2x - 3 < 0$. Решение этого квадратного неравенства $x \in (-1; 3)$. Итак, область определения данной функции $D(y) = (-1; 3)$.

***Пример 2***

Найдем область определения функции $y = \sqrt{\log_{0,3}(2x-1)}$.

Область определения данной функции задается неравенством $\log_{0,3}(2x-1) \geq 0$. Запишем его в виде $\log_{0,3}(2x-1) \geq \log_{0,3} 1$. Так как основание логарифма 0,3 меньше единицы, то логарифмическая функция убывающая. Поэтому полученное неравенство равносильно двойному линейному неравенству $0 < 2x - 1 \leq 1$ или $1 < 2x \leq 2$, решение которого $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$. Следовательно, область определения данной функции $D(y) = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

***Пример 3***

Найдем область значений функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x + 3)$.

Как и в примере 1, область определения данной функции $D(y) = (-1; 3)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $z(x) = -x^2 + 2x + 3$. Ее графиком является парабола, направленная ветвями вниз с вершиной в точке с координатами $x = 1$ и $z = 4$. При изменении $x$ на промежутке $(-1; 3)$ значения $z \in (0; 4]$. Функция $y = \log_{\frac{1}{2}} z$ является убывающей, т. к. основание $\frac{1}{2}$ логарифма меньше единицы. Поэтому значения $y$

меняются от $+\infty$ до $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$. Итак, область значений данной функции $E(y) = [-2; +\infty)$.

***Пример 4***

Установить четность (или нечетность) функции $y(x) = \log_{0,4}(x\sin x)$.

Сначала найдем область определения функции. Она задается неравенством $x\sin x > 0$. При $x > 0$ получаем: $\sin x > 0$. Решение этого неравенства $x \in (2\pi; \pi + 2\pi n)$, где $n \in Z$ и $n \geq 0$. При $x < 0$ $\sin x < 0$. Решение такого неравенства $x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, где $k \in Z$ и $k \leq 0$. Построив эти промежутки на числовой оси, легко увидеть, что область определения функции является симметричным множеством.

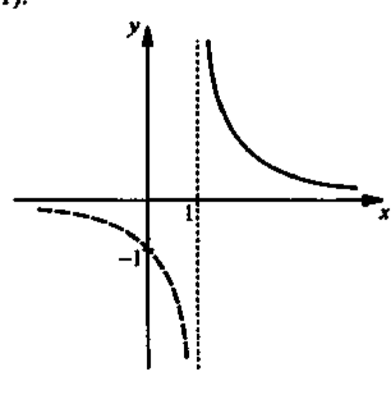
Теперь найдем $y(-x) = \log_{0,4}(-x\sin(-x)) = \log_{0,4}(x\sin x) = y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = y(x)$, то по определению функция $y(x)$ четная.

Достаточно часто встречаются задачи, связанные с построением графиков логарифмических функций. Для их построения используют те же приемы, что и для функций других видов. В ряде случаев функцию предварительно необходимо преобразовать.

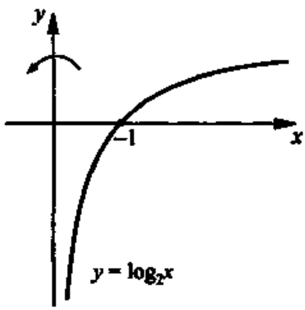
***Пример 5***

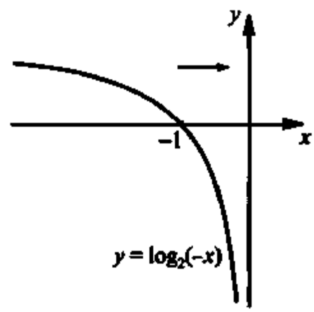
Построим график функции: а) $y = 3^{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$; б) $y = \log_2(1 - |x|)$; в) $y = \sqrt[32]{\log_{56} \cos^{1990} x}$.

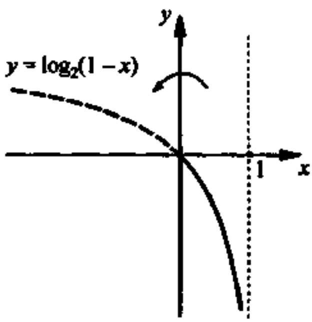
а) Учтем, что $x - 1 > 0$, т. е. $x > 1$. Выполним очевидные преобразования: $y = 3^{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}\right)^{-1} = (x-1)^{-1} = \frac{1}{x-1}$ (при условии $x > 1$).

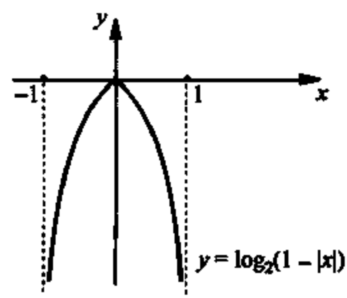


б) Очевидно, что этот график легко построить, используя схему: $y=\log_2 x \to y=\log_2(-x) \to y=\log_2(1-x) \to y=\log_2(1-|x|)$.

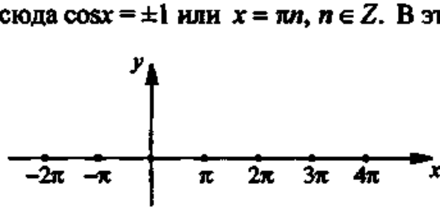



в) Несмотря на устрашающий вид функции $y$, график ее очень простой. $D(y)$ функции задается условием $\log_{56}\cos^{1990} x \ge 0$, т. е. $\cos^{1990} x \ge 1$. Отсюда $\cos x = \pm 1$ или $x = \pi n$, $n \in Z$. В этих точках $y = 0$.




**Свойства монотонности логарифмической функции используются для сравнения чисел.**

***Пример 6***

Сравним числа: а) $\log_5 7$ и $\log_5 8$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ и $\log_{\frac{1}{5}} 8$; в) $\log_5 23$ и $\log_6 39$.

а) Логарифмическая функция с основанием бóльшим единицы является возрастающей, т. е. бóльшему значению аргумента соответствует бóльшее значение функции. Так как $7 < 8$, то и $\log_5 7 < \log_5 8$, т. е. второе число больше.

б) Логарифмическая функция с основанием меньше единицы убывает в области определения, т. е. бóльшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Так как $7 < 8$, то $\log_{\frac{1}{5}} 7 > \log_{\frac{1}{5}} 8$, т. е. первое число больше.

в) Оценим данные числа. Учтем, что основания логарифмов больше единицы. Так как $23 < 25$, то $\log_5 23 < \log_5 25 = 2$. Учтем, что $39 > 36$, и тогда $\log_6 39 > \log_6 36 = 2$. Итак, первое число меньше 2, а второе число больше 2. Поэтому $\log_5 23 < \log_6 39$, т. е. второе число больше.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение логарифмической функции.
2. Приведите графики логарифмической функции.
3. Перечислите основные свойства логарифмической функции (фронтальный опрос).

**V. Задание на уроках**

§ 42, № 1 (а, б); 3 (в, г); 5 (а); 6 (а, б); 8 (в, г); 9 (а); 10 (б); 11 (а, б); 14 (в, г); 17 (а, б); 19 (в, г); 22 (а); 23 (б); 25 (б).

**VI. Задание на дом**

§ 42, № 1 (в, г); 3 (а, б); 5 (б); 6 (в, г); 8 (а, б); 9 (б); 10 (а); 11 (в, г); 14 (а, б); 17 (в, г); 19 (а, б); 22 (б); 23 (в).

**VII. Творческие задания**

**Постройте графики функций, уравнений, неравенств:**

| | |
|---|---|
| 1) $y = \log_4 \lvert x-2 \rvert$; | 8) $y \le \log_{\frac{1}{2}} (1-\lvert x \rvert)$; |
| 2) $y = \log_4 \lvert x \rvert - 2$; | 9) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-9}{x-3}$; |
| 3) $y = \lvert \log_4 x - 2 \rvert$; | 10) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x-1}{x+1}$; |
| 4) $\lvert y \rvert = \log_4 x$; | 11) $y = \log_3 \operatorname{tg} x$; |
| 5) $\lvert y \rvert = \log_4 \lvert x \rvert$; | 12) $y = \log_{\frac{1}{3}} \lvert \cos x \rvert$; |
| 6) $y \ge \log_{\frac{1}{2}} (x^2+4x+4)$; | 13) $y = \dfrac{1}{\log_2 \sin x}$; |
| 7) $y = \log_{\frac{1}{2}} (1-x)$; | 14) $y = (\sin x)^{\log_{\sin x}(x+2)}$. |

**VIII. Подведение итогов уроков**

# Уроки 28–29. Свойства логарифмов

*Цель*: продолжить рассмотрение свойств логарифмов.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

**Вариант 1**

1. Найдите область определения функции $y = \log_{0,3} \dfrac{1-3x}{x+1}$.

*Ответы*: а) $(0; \infty)$; б) $\left(-1; \dfrac{1}{3}\right)$; в) $\left(\dfrac{1}{3}; \infty\right)$; г) $(-\infty; -1)$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = \log_4(x^2 - 6x + 11)$.

*Ответы*: а) $\log_4 11$; б) 1; в) –2; г) 0,5.

3. Решите уравнение $\log_7(3-2x) = \dfrac{1}{3}(\log_3 81 - 1)$.

*Ответы*: а) –2; б) 1; в) –23; г) –4.

**Вариант 2**

1. Найдите область определения функции $y = \log_{0,4} \dfrac{x-3}{2x+1}$.

*Ответы*: а) $(0; \infty)$; б) $\left(-\dfrac{1}{2}; 3\right)$; в) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$; г) $(3; \infty)$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 4x + 7)$.

*Ответы*: а) –1; б) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; в) 2; г) 1.

3. Решите уравнение $\log_5(2-3x) = \dfrac{1}{4}(\log_3 27 + 1)$.

*Ответы*: а) –16; б) –1; в) 0,5; г) –6.

### III. Изучение нового материала

Разумеется, после введения нового понятия логарифма и новой операции логарифмирования необходимо изучить их **свойства**. Это необходимо для более эффективного решения самых разнообразных задач. Рассмотрим ряд теорем.

**Теорема 1.** Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел, т. е. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Докажем это утверждение. Обратите внимание на доказательство, т. к. подобная схема используется и при рассмотрении других свойств логарифмов и основана на свойствах степеней.

Обозначим: $\log_a(bc) = x$, $\log_a b = y$ и $\log_a c = z$. Надо доказать, что выполняется $x = y + z$. Так как $\log_a(bc) = x$, то $bc = a^x$. Из равенства $\log_a b = y$ следует, что $b = a^y$; из равенства $\log_a c = z$ получаем $c = a^z$. Перемножая соотношения $b = a^y$ и $c = a^z$, имеем $bc = a^y \cdot a^z = a^{y+z}$. Сравним это равенство с равенством $bc = a^x$ и получим $a^{y+z} = a^x$, откуда $x = y + z$, т. е. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

***Пример 1***

Вычислим: а) $\log_{12}3 + \log_{12}4$; б) $\log_{60}3 + \log_{60}4 + \log_{60}5$.

Используя доказанную теорему, получаем:

а) $\log_{12}3 + \log_{12}4 = \log_{12}(3 \cdot 4) = \log_{12}12 = 1$;

б) $\log_{60}3 + \log_{60}4 + \log_{60}5 = \log_{60}(3 \cdot 4 \cdot 5) = \log_{60}60 = 1$.

**Теорема 2.** Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел, т. е. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

Теорема доказывается полностью аналогично предыдущей.

***Пример 2***

Решим уравнение: а) $\log_2(3 - 2x) = \log_2 6 - \log_2 3$; б) $\log_5(3x - 2) = \log_3 6 + \log_3 7 - \log_3 14$.

а) Используя теорему 2, получаем $\log_2(3-2x) = \log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 \dfrac{6}{3} = \log_2 2 = 1$. Из определения логарифма имеем $3 - 2x = 2^1 = 2$.

Решая это линейное уравнение, находим $x = \dfrac{1}{2}$.

б) Применяя теоремы 1 и 2, получаем $\log_5(3x-2) = \log_3 6 + \log_3 7 - \log_3 14 = \log_3 \dfrac{6 \cdot 7}{14} = \log_3 3 = 1$. Тогда имеем $3x - 2 = 5^1 = 5$, откуда $3x = 7$ и $x = \dfrac{7}{3}$.

**Теорема 3.** Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания степени, т. е. $\log_a b^r = r \log_a b$.

Опять аналогично теореме 1 докажем это утверждение. Введем обозначения $\log_a b^r = x$ и $\log_a b = y$. Надо доказать, что $x = ry$. Из равенства $\log_a b^r = x$ имеем: $b^r = a^x$, а из равенства $\log_a b = y$ получаем: $b = a^y$. Возведем последнее равенство в степень $r$, тогда $b^r = (a^y)^r = a^{ry}$. Сравнивая соотношения $b^r = a^{ry}$ и $b^r = a^x$, получаем равенство $a^x = a^{ry}$ или $x = ry$. Теорема доказана.

***Пример 3***

Известно, что $\log_5 2 = a$ и $\log_5 3 = b$. Выразим $\log_5 72$ через величины $a$ и $b$.

Число 72 разложим на простые множители $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Используя теоремы 1 и 3, получаем: $\log_5 72 = \log_5(2^3 \cdot 3^2) = \log_5 2^3 + \log_5 3^2 = 3\log_5 2 + 2\log_5 3 = 3a + 2b$.

Заметим, что теоремы (и соответствующие формулы) 1–3 требуют внимательного отношения и справедливы только для положительных логарифмируемых чисел.

***Пример 4***

Запишем формулу 1 в случае отрицательных чисел $b$ и $c$.

Очевидно, что в данном случае формула 1 напрямую бессмысленна, т. к. логарифм от отрицательно числа не существует. При этом произведении $bc > 0$ и его можно записать в виде $bc = |bc| = |b| \cdot |c|$ (по определению и свойству модуля числа). Тогда формула 1 имеет вид: $\log_a(bc) = \log_a(|b| \cdot |c|) = \log_a |b| + \log_a |c| = \log_a(-b) + \log_a(-c)$. При этом очевидно, что числа $(-b)$ и $(-c)$ положительные.

Таким образом, если числа $b$ и $c$ одного знака (или положительные, или отрицательные), формулы 1 и 2 имеют вид: $\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$ (1); $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$ (2).

Аналогично можно показать, что при $b$ или положительном или отрицательном и четном показателе степени (т. е. $r = 2n,\ n \in Z$) формула 3 имеет вид: $\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|$ (3).

Наконец, отметим еще одно свойство, вытекающее из монотонности логарифмической функции.

**Теорема 4.** Равенство $\log_a t = \log_a s$ (где $a > 0$, $a \neq 0$; $t, s > 0$) справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

***Пример 5***

Решим уравнение $\log_2(2x+3) + 2\log_2 3 = \log_2(x+2) + 3\log_2 5 - \log_2 7$.

Сгруппируем члены уравнения, зависящие от $x$, в левой части, не зависящие от $x$ – в правой. Используем свойства логарифмов и преобразуем уравнение. Получаем: $\log_2(2x+3)-\log_2(x+2)=$ $=3\log_2 5-2\log_2 3-\log_2 7$, или $\log_2\dfrac{2x+3}{x+2}=\log_2 5^3-\log_2 3^2-\log_2 7$, или $\log_2\dfrac{2x+3}{x+2}=\log_2\dfrac{125}{9\cdot 7}$. Так как равны логарифмы величин, то равны и сами величины. Получаем рациональное уравнение $\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{25}{63}$, тогда $63(2x+3)=125(x+2)$ или $126x+189=125x+250$, откуда $x=61$.

Разумеется, свойства логарифмов можно использовать и в более сложных задачах.

***Пример 6***

Вычислим значение выражения:

а) $\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{(\sin a)^{\lg\cos a}}{(\cos a)^{\lg\sin a}}$;

в) $11^{\log_{12}13}-13^{\log_{12}11}$;

г) $\lg \operatorname{tg}1°+\lg \operatorname{tg}2°+\ldots+\lg \operatorname{tg}89°$.

а) Учтем, что $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$, откуда $\sqrt{3}-\sqrt{2}=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}$. Теперь легко посчитать данное выражение:

$$\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}}=\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

б) Используем определение логарифма. Тогда $\sin a=10^{\lg\sin a}$ и $\cos a=10^{\lg\cos a}$. Данное выражение имеет вид: $\dfrac{(\sin a)^{\lg\cos a}}{(\cos a)^{\lg\sin a}}=$

$$=\frac{(10^{\lg\sin a})^{\lg\cos a}}{(10^{\lg\cos a})^{\lg\sin a}}=\frac{10^{\lg\sin a\cdot\lg\cos a}}{10^{\lg\cos a\cdot\lg\sin a}}=1.$$

в) Вновь применим определение логарифма. Так как в данном выражении уже есть логарифмы по основанию 12, то запишем числа в виде: $11=12^{\log_{12}11}$ и $13=12^{\log_{12}13}$. Теперь вычислим значение данного выражения: $11^{\log_{12}13}-13^{\log_{12}11}=(12^{\log_{12}11})^{\log_{12}13}-(12^{\log_{12}13})^{\log_{12}11}=12^{\log_{12}11\cdot\log_{12}13}-$ $-12^{\log_{12}13\cdot\log_{12}11}=0.$

г) Используем формулу для логарифма произведения чисел, группировку множителей и формулу приведения. Получаем:

$\log \mathrm{tg}1° + \log \mathrm{tg}2° + \log \mathrm{tg}3° + \ldots + \log \mathrm{tg}45° + \ldots + \log \mathrm{tg}87° + \log \mathrm{tg}88° + \log \mathrm{tg}89° = \log(\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}2° \cdot \mathrm{tg}3° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}45° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}87° \cdot \mathrm{tg}88° \cdot \mathrm{tg}89°) = \log((\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}89°) \cdot (\mathrm{tg}2° \cdot \mathrm{tg}88°) \cdot (\mathrm{tg}3° \cdot \mathrm{tg}87°) \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}45°) = \log((\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{ctg}1°) \cdot (\mathrm{tg}2° \cdot \mathrm{ctg}2°) \cdot (\mathrm{tg}3° \cdot \mathrm{ctg}3°) \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}45°) = \log 1 = 0.$

***Пример 1***

**IV. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение логарифма числа.
2. Перечислите основные свойства логарифмов (фронтальный опрос у доски).
3. Докажите любое свойство логарифмов (по своему выбору).

**V. Задание на уроках**

§ 43, № 2 (а, б); 4 (в, г); 5 (а); 8 (б); 11 (а); 13 (в); 18 (а, б); 19 (а); 22 (б); 25 (а, б); 28 (а); 29 (в); 30 (а, б); 34 (а); 37 (а, б).

**VI. Задание на дом**

§ 43, № 2 (в, г); 4(а, б); 5 (б); 8 (а); 11 (б); 13 (г); 18 (в, г); 19 (б); 22 (а); 25 (в, г); 28 (б); 29 (г); 30 (в, г); 34 (б); 37 (в, г).

**VII. Подведение итогов уроков**

## Уроки 30–31. Логарифмические уравнения

***Цели***: систематизировать логарифмические уравнения; рассмотреть способы их решения.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Докажите теорему о логарифме произведения двух чисел.
2. Вычислите: $\dfrac{\frac{1}{2}\log_3 64 - 2\log_3 2}{\log_3 2}$.
3. Постройте график функции $y = \log_2(4x)$.

**Вариант 2**

1. Докажите теорему о логарифме частного двух чисел.

2. Вычислите: $\dfrac{\log_6 48}{\frac{1}{3}\log_6 27 + 4\log_6 2}$.

3. Постройте график функции $y = \log_3 \dfrac{x}{9}$.

## III. Изучение нового материала

### Логарифмические уравнения

**Логарифмическим уравнением называют уравнение, в котором неизвестная входит только в аргументы логарифмических функций при некоторых постоянных основаниях.**

***Пример 1***

а) Уравнение $\log_3(x^2+2x)+2\log_5(x^3+1)=7$ логарифмическое.

б) Уравнение $\log_3(x^2+2x)+x\log_5(x^3+1)=7$ не является логарифмическим.

Так как логарифмическая функция $\log_a x$ монотонна и ее область значений $(-\infty;\ \infty)$, то простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = b$ имеет **единственный корень**. Именно **к виду** $\log_a x = b$ надо **сводить** более сложные уравнения. Типы и способы решения логарифмических уравнений схожи с показательными уравнениями.

**1. Простейшие уравнения**

***Пример 2***

Решим уравнение $\log_{\frac{1}{9}}(2x^2-2x-1) = -\dfrac{1}{2}$.

По определению логарифма получаем уравнение: $2x^2-2x-1=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, или $2x^2-2x-1=3$, или $x^2-x-2=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1=-1$ и $x_2=2$ также являются решениями данного логарифмического уравнения.

***Пример 3***

Решим уравнение $\log_{25}\left[\dfrac{1}{5}\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] = -\dfrac{1}{2}$. Несмотря на громоздкость этого уравнения, оно тоже относится к простейшим. Используя определение логарифма, получаем: $\dfrac{1}{5}\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}} x\right) = 25^{-\frac{1}{2}}$

или $\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)=1.$ Вновь используем определение логарифма. Имеем: $2-\log_{\frac{1}{2}} x=3^1=3$, откуда $\log_{\frac{1}{2}} x=-1$. Еще раз применяя определение логарифма, находим $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2.$

**Особенностью логарифмических уравнений** (в отличие от показательных) является появление посторонних решений. Это связано с расширением ОДЗ уравнения в ходе его преобразований. Поэтому полученные корни необходимо проверять подстановкой или следить за изменением ОДЗ.

***Пример 4***

Рассмотрим уравнение $\log_3(x^2-4)=\log_3(4x-7)$.

Его ОДЗ задается неравенствами $\begin{cases} x^2-4>0, \\ 4x-7>0. \end{cases}$ Решая эту систему неравенств, получаем: $\begin{cases} x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty), \\ x\in\left(\frac{7}{4};\infty\right), \end{cases}$ откуда $x\in(2;\infty)$. Так как в данном уравнении равны логарифмы двух величин, то равны и сами величины. Получаем квадратное уравнение: $x^2-4=4x-7$ или $x^2-4x+3=0$. Очевидно, ОДЗ этого уравнения $x\in(-\infty;\infty)$, т. е. произошло расширение ОДЗ по сравнению с первоначальным уравнением. Корни квадратного уравнения $x_1=1$ и $x_2=3$. Однако в ОДЗ исходного уравнения попадает только число $x=3$, которое и является его решением. Корень $x=1$ является посторонним и возник при расширении ОДЗ.

**2. Уравнения, решаемые их преобразованиями**

Во многих случаях при решении логарифмического уравнения его необходимо преобразовать, используя основные свойства логарифмов.

***Пример 5***

Решим уравнение $2\log_3(x-2)-\log_3\left(x^2-4x+\frac{28}{9}\right)=2.$

ОДЗ уравнения определяется условиями $\begin{cases} x-2>0, \\ x^2-4x+\frac{28}{9}>0 \end{cases}$ (решать эту систему неравенств не будем). Сведем данное уравнение к простейшему. Запишем уравнение в виде: $\log_3(x-2)^2 - \log_3\left(x^2-4x+\frac{28}{9}\right)=2$ или $\log_3\frac{(x-2)^2}{x^2-4x+\frac{28}{9}}=2$. По определению логарифма получаем: $\frac{(x-2)^2}{x^2-4x+\frac{28}{9}}=3^2=9$ или $x^2-4x+3=0$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. В ОДЗ данного уравнения входит только решение $x = 3$.

***Пример 6***

Решим уравнение $\log_6\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\log_6(x-11)=1$.

ОДЗ уравнения задается условиями $\begin{cases} x-2>0, \\ x-11>0, \end{cases}$ откуда $x\in(11;\infty)$.

Запишем уравнение в виде: $\frac{1}{2}\log_6(x-2)+\frac{1}{2}\log_6(x-11)=1$, или $\log_6(x-2)+\log_6(x-11)=2$, или $\log_6(x^2-13x+22)=2$. По определению логарифма получаем квадратное уравнение: $x^2-13x+22=36$ или $x^2-13x-14=0$. Корни этого уравнения $x_1 = 14$ и $x_2 = -1$ (не входит в ОДЗ).

**3. Уравнения, решаемые разложением на множители**

***Пример 7***

Решим уравнение $\sqrt{x-1}\log_2(3x^2-5)+2=\log_2(3x^2-5)+2\sqrt{x-1}$.

Перенесем все члены уравнения в левую часть, сгруппируем их и разложим эту часть на множители. Получаем: $\sqrt{x-1}\log_2(3x^2-5)+2-\log_2(3x^2-5)-2\sqrt{x-1}=0$, или $(\sqrt{x-1}\log_2(3x^2-5)-\log_2(3x^2-5))+(2-2\sqrt{x-1})=0$, или $\log_2(3x^2-5)\cdot(\sqrt{x-1}-1)-2(\sqrt{x-1}-1)=0$, или $(\log_2(3x^2-5)-2)(\sqrt{x-1}-1)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а остальные множители имеют смысл. Получаем два уравнения:

а) $\log_2(3x^2-5)-2=0$, тогда $\log_2(3x^2-5)=2$ и $3x^2-5=4$, откуда $x^2=3$ и $x=\pm\sqrt{3}$. Однако при $x=-\sqrt{3}$ второй множитель не имеет смысла.

б) $\sqrt{x-1}-1=0$, тогда $\sqrt{x-1}=1$ и $x-1=1$ и $x=2$. Для этого значения $x$ первый множитель определен.

Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = 2$.

**4. Уравнения, решаемые с помощью замены неизвестной**

Этот способ широко используется при решении любых типов уравнений.

***Пример 8***

Решим уравнение $\log_2^2(2x-1)+\log_2(2x-1)-2=0$.

Сделаем замену $y=\log_2(2x-1)$. Тогда получаем квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Заметим, что ОДЗ исходного уравнения устанавливать нет необходимости, так как если уравнение $y^2 + y - 2 = 0$ имеет решения (его корни $y_1 = -2$, $y_2 = 1$), то это означает, что $\log_2(2x-1)$ существует, т. е. $2x - 1 > 0$.

Таким образом, приходим к совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\log_2(2x-1)=-2,\\ \log_2(2x-1)=1\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}2x-1=2^{-2}=\dfrac{1}{4},\\ 2x-1=2^1=2.\end{array}\right.$ Отсюда: $x_1=\dfrac{5}{8}$, $x_2=\dfrac{3}{2}$.

В случае однородных уравнений приходится вводить две новые переменные.

***Пример 9***

Решим уравнение $\log_2^2(10-3x)=3\log_2(10-3x)\log_2(4-x)-2\log_2^2(4-x)$.

ОДЗ уравнения задается условиями $\begin{cases}10-3x>0,\\ 4-x>0,\end{cases}$ откуда $x>\dfrac{10}{3}$.

Введем две новые переменные: $a=\log_2(10-3x)$ и $b=\log_2(4-x)$ и получим однородное уравнение: $a^2=3ab-2b^2$ или $a^2-3ab+2b^2=0$. Решения этого уравнения $a = b$ и $a = 2b$. Вернемся к старой переменной. Получаем два уравнения:

а) $\log_2(10-3x)=\log_2(4-x)$, тогда $10 - 3x = 4 - x$, откуда $x = 3$ (входит в ОДЗ).

б) $\log_2(10-3x)=2\log_2(4-x)$ или $\log_2(10-3x)=\log_2(4-x)^2$, тогда $10 - 3x = (4 - x)^2$ или $0 = x^2 - 5x + 6$, откуда $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$ (оба корня входят в ОДЗ).

Итак, данное уравнение имеет два решения: $x = 3$ и $x = 2$.

**5. Уравнения, решаемые с помощью его специфики**

Встречаются задачи, решение которых основано на свойствах входящих в них функций.

***Пример 10***

Решим уравнение $\log_2 x=\sqrt{8-x}$.

Исследуем монотонность функций, входящих в уравнение. Функция $y_1 = \log_2 x$ возрастающая, функция $y_2 = \sqrt{8-x}$ убывающая. Очевидно, если данное уравнение имеет корень, то он единственный. Далее этот корень надо подобрать (угадать). Подбором находим $x = 4$.

В ряде случаев встречаются уравнения, содержащие логарифмы неизвестных, но не являющиеся логарифмическими. Тогда используются специальные приемы, суть которых станет понятна из примеров.

***Пример 11***

Решим уравнение $3x = x^{\log_3 x^2}$.

Найдем **логарифм** по основанию 3 **от обеих частей** данного **уравнения** и используем свойства логарифмов. Получаем: $\log_3(3x) = \log_3(x^{\log_3 x^2})$, или $\log_3 3 + \log_3 x = \log_3 x^2 \cdot \log_3 x$, или $1 + \log_3 x = 2\log_3 x \cdot \log_3 x$, или $1 + \log_3 x = 2\log_3^2 x$. Введем новую неизвестную $y = \log_3 x$ и получим квадратное уравнение: $1 + y = 2y^2$ или $0 = 2y^2 - y - 1$. Его корни $y_1 = 1$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$. Вернемся к старой неизвестной $x$. Имеем два уравнения: $\log_3 x = 1$ (корень $x_1 = 3^1 = 3$) и $\log_3 x = -\frac{1}{2}$ (тогда $x_2 = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$).

***Пример 12***

Решим уравнение $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$.

Используя основное **логарифмическое тождество**, запишем основание степени в виде $x = 5^{\log_5 x} = (2^{\log_2 5})^{\log_5 x} = 2^{\log_2 5 \cdot \log_5 x}$. Тогда данное уравнение имеет вид: $3 \cdot 2^{\log_2 5 \cdot \log_5 x \cdot \log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$, или $3 \cdot 2^{\log_5 x} + 2^{\log_5 x} = 64$, или $4 \cdot 2^{\log_5 x} = 64$. Получаем: $2^{\log_5 x} = 16$ и $\log_5 x = 4$, откуда $x = 5^4 = 625$.

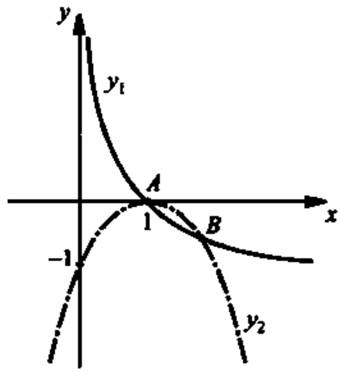
**6. Уравнения, решаемые графически**

При решении уравнений и исследовании их корней часто используется **графический способ**.

***Пример 13***

Определим число корней уравнения $\log_{\frac{1}{2}} x = -x^2 + 2x - 1$ и найдем меньший из них.

Запишем уравнение в виде $\log_{\frac{1}{2}} x = -(x-1)^2$ и построим графики функций $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ (сплошная линия) и $y_2 = -(x-1)^2$ (штрихпунктирная линия). Видно, что графики этих функций пересекаются в двух точках $A$ и $B$. Следовательно, уравнение имеет два решения. Абсцисса точки $A$ меньше абсциссы точки $B$. Поэтому меньший корень уравнения $x = 1$.




**Системы логарифмических уравнений**

При решении систем логарифмических уравнений используются те же приемы, что и при решении отдельных уравнений. Поэтому остановимся только на некоторых способах решения систем уравнений.

**1. Сведение к системе алгебраических уравнений**

***Пример 14***

Решим систему уравнений $\begin{cases} \log_2(3x-y)=1, \\ \log_5(5x+y)=2. \end{cases}$

Заменим эту систему системой линейных уравнений: $\begin{cases} 3x-y=2^1=2, \\ 5x+y=5^2=25. \end{cases}$ Сложив уравнения, найдем $8x = 27$ или $x=\frac{27}{8}$.

Тогда из первого уравнения найдем $y=3x-2=\frac{27\cdot 3}{8}-2=\frac{65}{8}$. Итак, решение системы $\left(\frac{27}{8}; \frac{65}{8}\right)$.

Во многих случаях перед тем как свести систему к системе алгебраических уравнений приходится выполнить тождественные преобразования уравнений системы.

***Пример 15***

Решим систему уравнений $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)-1=\lg 13, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=3\lg 2. \end{cases}$

Запишем систему в виде $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 13=\lg 10+\lg 13=\lg 130, \\ \lg\dfrac{x+y}{x-y}=\lg 2^3=\lg 8, \end{cases}$

или $\begin{cases} x^2+y^2=130, \\ \dfrac{x+y}{x-y}=8, \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2+y^2=130, \\ 7x=9y, \end{cases}$ решая которую найдем: $\begin{cases} x_1=9, \\ y_1=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2=-9, \\ y_2=-7, \end{cases}$ причем второе решение не удовлетворяет ОДЗ второго исходного уравнения (т. е. не является решением).

**2. Подстановка неизвестного из одного из уравнений**

Очень распространенный способ решения систем уравнений, при котором **одно из неизвестных выражается через другое** из наиболее простого уравнения и **подставляется** в другое. Полученное уравнение одной неизвестной затем решается.

***Пример 16***

Решим систему уравнений $\begin{cases} \log_2(y+1)+\log_2 y=\log_2\left(\dfrac{x}{y}-2\right), \\ 5+\log_2\dfrac{y}{x}=\dfrac{6}{\log_2\dfrac{x}{y}}. \end{cases}$

Решим сначала второе уравнение системы, сделав замену $\log_5\dfrac{x}{y}=z$: $5-z=\dfrac{6}{z}$ или $z^2-5z+6=0$, корни которого $z_1=2$, $z_2=3$.

Отсюда получаем: $\log_2\dfrac{x}{y}=2$ и $\log_2\dfrac{x}{y}=3$, или $\dfrac{x}{y}=4$ и $\dfrac{x}{y}=8$, или $x=4y$ и $x=8y$.

Обратимся теперь к первому уравнению системы, которое можно записать в виде $y(y+1)=\dfrac{x}{y}-2$. В случае $\dfrac{x}{y}=4$ имеем: $y^2+y-2=0$, т. е. $y_1 = 1$, $y_2 = -2$ (не удовлетворяет ОДЗ) и $x_1 = 4$. В случае $\dfrac{x}{y} = 8$ получаем: $y^2 + y - 6 = 0$, т. е. $y_3 = 2$, $y_4 = -3$ (не удовлетворяет ОДЗ) и $x_3 = 16$. Итак, решения системы: (4; 1); (16; 2).

**3. Замена переменных**

Замена переменных является одним из наиболее распространенных способов решения уравнений, неравенств, систем уравнений.

***Пример 17***

Решим систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x + \log_2(y-1) = 1, \\ \log_2 x \cdot \log_2(y-1) = -2. \end{cases}$

Введем новые переменные $a = \log_2 x$ и $b = \log_2(y-1)$. Тогда имеем систему алгебраических симметричных уравнений $\begin{cases} a+b=1, \\ ab=-2. \end{cases}$ Такая система имеет решения $(-1; 2)$ и $(2; -1)$.

Вернемся к старым неизвестным $x$, $y$ и получим две простейшие системы.

а) $\begin{cases} \log_2 x = -1, \\ \log_2(y-1) = 2, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}, \\ y-1 = 2^2 = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2(y-1) = -1, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x = 2^2 = 4, \\ y-1 = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4, \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Итак, данная система имеет два решения $\left(\dfrac{1}{2}; 5\right)$ и $\left(4; \dfrac{3}{2}\right)$.

**IV. Задание на уроках**

§ 44, № 2 (а); 4 (в); 7 (б); 8 (г); 10 (а); 12 (б); 13 (а, б); 14 (а); 15 (б); 16 (а, б); 18 (а); 19 (б); 20 (а); 21 (б); 22 (а).

**V. Задание на дом**

§ 44, № 2 (г); 4 (б); 7 (г); 8 (б); 10 (б); 12 (а); 13 (в, г); 14 (б); 15 (а); 16 (в, г); 18 (б); 19 (а); 20 (б); 21 (а); 22 (б).

**VI. Подведение итогов уроков**

# Урок 32. Логарифмические неравенства

***Цель***: рассмотреть особенности решения логарифмических неравенств.

## Ход урока

### I. Сообщение темы и цели урока

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Решите уравнение:

а) $\log_3(x-1)-\log_3 2=\log_3 4$;

б) $2\log_4^2 x-5\log_4 x+3=0$.

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\log_5(x^2+y^2)=2,\\ \log_4 x=1+\log_4 5-\log_4 y.\end{cases}$

**Вариант 2**

1. Решите уравнение:

а) $\log_4(x+3)-\log_4 3=\log_4 5$;

б) $3\log_3^2 x+\log_3 x-4=0$.

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\log_{13}(x^2+y^2)=2,\\ \log_5 x=\log_5 y+1-\log_5 12.\end{cases}$

### III. Изучение нового материала

При решении простейших логарифмических неравенств $\log_a x\vee b$ необходимо учитывать монотонность логарифмической функции $\log_a x$: при $0<a<1$ эта функция убывает, при $a>1$ возрастает.

***Пример 1***

Решим неравенство $\log_2(x-13)\le 3$.

ОДЗ неравенства задается условием $x-13>0$. Запишем данное неравенство в виде $\log_2(x-13)\le\log_2 8$. Так как основание логарифмов 2 больше единицы, то логарифмическая функция возрастающая и аргументы логарифмов связаны неравенством того же знака: $x-13\le 8$. С учетом ОДЗ получаем, что данное неравенство равносильно двойному линейному неравенству $0<x-13\le 8$, решение которого $x\in(13;21]$.

***Пример 2***

Решим неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)<\log_{\frac{1}{2}}7$.

ОДЗ неравенства определяется условием $3x-2>0$. Так как основание логарифмов $\frac{1}{2}$ меньше единицы, то логарифмическая функция убывающая и аргументы логарифмов связаны неравенством противоположного знака, т. е. $3x-2>7$. С учетом ОДЗ получаем, что данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases}3x-2>0,\\3x-2>7.\end{cases}$ Так как второе неравенство более жесткое, чем первое, то полученная система (в свою очередь) равносильна второму неравенству $3x-2>7$, решение которого $x\in(3;\,\infty)$.

Такие же соображения используются и при решении более сложных неравенств.

***Пример 3***

Решим неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3-2x}{1+x}\geq -1$.

Учтем, что основание логарифма $\frac{1}{2}$ меньше единицы, ОДЗ неравенства и $-1=\log_{\frac{1}{2}}2$. Тогда данное неравенство равносильно двойному неравенству $0<\frac{3-2x}{1+x}\leq 2$. Запишем это неравенство в виде системы неравенств и решим ее методом интервалов. Получаем: $\begin{cases}0<\frac{3-2x}{1+x},\\\frac{3-2x}{1+x}\leq 2,\end{cases}$ или $\begin{cases}0<\frac{3-2x}{1+x},\\\frac{3-2x}{1+x}-2\leq 0,\end{cases}$ или $\begin{cases}0<\frac{3-2x}{1+x},\\\frac{1-4x}{1+x}\leq 0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x\in\left(-1;\,\frac{3}{2}\right),\\x\in(-\infty;\,-1)\cup\left[\frac{1}{4};\,\infty\right),\end{cases}$ тогда $x\in\left[\frac{1}{4};\,\frac{3}{2}\right)$. Итак, решение данного неравенства $x\in\left[\frac{1}{4};\,\frac{3}{2}\right)$.

*Пример 4*

Решим неравенство $x^{(\lg x)^2-3\lg x+1}>1000$.

ОДЗ неравенства: $x\in(0;+\infty)$. Возьмем от обеих частей неравенства логарифм по основанию 10. При этом знак неравенства не изменится, т. к. основание логарифма больше 1: $[(\lg x)^2-3\lg x+1]\lg x>3$. Введем замену $y = \lg x$ и придем к неравенству третьей степени $(y^2-3y+1)y>3$ или $y^3-3y^2+y-3>0$, которое легко решается разложением на множители $(y-3)(y^2+1)>0$ или $y-3>0$, откуда $y>3$. Получаем простейшее логарифмическое неравенство $\lg x>3$, откуда $x>10^3=1000$. Итак, решение неравенства $x\in(1000;+\infty)$.

В случае, если в основание показательной или логарифмической функции входит неизвестная величина $x$, то, естественно, необходимо рассмотреть ситуации, когда это основание принадлежит промежутку $(0; 1)$ и когда принадлежит промежутку $(1; +\infty)$.

*Пример 5*

Решим неравенство $\log_{x+3}(x^2-x)<1$.

ОДЗ неравенства определяется условиями $\begin{cases}x^2-x>0,\\x+3>0,\\x+3\neq 1\end{cases}$ или

$\begin{cases}x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty),\\x\in(-3;+\infty),\\x\neq -2,\end{cases}$ откуда $x\in(-3;-2)\cup(-2;0)\cup(1;+\infty)$.

а) При $0<x+3<1$, т. е. $x\in(-3;-2)$, имеем: $\log_{x+3}(x^2-x)<$ $<\log_{x+3}(x+3)$, откуда $x^2-x>x+3$, так как при таком основании логарифмическая функция убывающая. Решив это неравенство, найдем: $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. Однако необходимо учесть ограничения на $x$ ($x\in(-3;-2)$). Тогда получаем $x\in(-3;-2)$.

б) При $x+3>1$, т. е. $x\in(-2;+\infty)$, а с учетом ОДЗ $x\in(-2;0)\cup(1;+\infty)$, имеем: $\log_{x+3}(x^2-x)<\log_{x+3}(x+3)$, откуда $x^2-x<x+3$, так как при основании большем 1 логарифмическая функция возрастающая. Решив это неравенство, найдем $x\in(-1;3)$. С учетом ограничений на $x$ получаем: $x\in(-1;0)\cup(1;3)$.

Объединяя первый и второй случаи, получаем решение неравенства: $x\in(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(1;3)$.

Разумеется, при решении логарифмических неравенств (как и других неравенств) очень эффективен **метод интервалов**.

***Пример 6***

Решим неравенство $\dfrac{\log_2(x+3)-2}{\log_5(2x+1)-1} \le 0.$

ОДЗ неравенства задается условиями $\begin{cases} x+3>0, \\ 2x+1>1. \end{cases}$

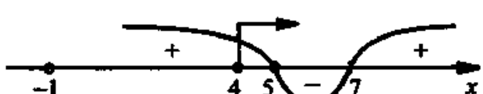
Решение этой системы линейных неравенств $x > -0{,}5$. Найдем значения $x$, при которых числитель и знаменатель данной дроби обращаются в нуль. Решив уравнение $\log_2(x+3)-2=0$, найдем $x = 1$. Решая уравнение $\log_5(2x+1)-1=0$, получим $x = 2$. Нанесем эти точки на координатную ось. Для любого значения $x$, входящего в ОДЗ, определим знак данной дроби. Например, для $x = 10$ получаем: $\dfrac{\log_2 13-2}{\log_5 21-1}$. Сделаем грубые оценки: $\log_2 13 \approx 4$ и $\log_5 21 \approx 2$. Поэтому данная дробь имеет положительный знак. Теперь, учитывая ОДЗ выражения, строим диаграмму его знаков. Из диаграммы видно, что решения неравенства – промежуток $x \in [1; 2)$.


Особенно полезен метод интервалов, если в неравенство входят **выражения разных типов**.

***Пример 7***

Решим неравенство $\dfrac{\log_3(x-4)-1}{x^2-4x-5} \ge 0.$

Очевидно, что ОДЗ неравенства $x > 4$. Числитель дроби обращается в нуль при $x = 7$, знаменатель – 1 при $x = -1$ и $x = 5$. Отметим эти точки на координатной оси. Определим знак данного выражения. Например, при $x = 13$ получаем: $\dfrac{\log_3 9-1}{169-52-5} = \dfrac{1}{112} > 0$. С учетом ОДЗ выражения строим диаграмму его знаков. Из диаграммы получаем решения неравенства $x \in (4; 5) \cup [7; +\infty)$.



**IV. Задание на уроке**

§ 45, № 3 (а, б); 5 (в, г); 7 (б); 9 (а, б); 10 (б); 12 (а, б); 13 (в); 16 (б); 17 (а); 18 (б).

**V. Задание на дом**

§ 45, № 3 (в, г); 5 (а, б); 7 (г); 9 (в, г); 10 (г); 12 (в, г); 13 (г); 15 (б); 16 (а); 17 (б); 18 (а).

**VI. Творческие задания**

Решите неравенство:

а) $\dfrac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\dfrac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)} \le 0$;

б) $\dfrac{\log_{0,3}\left(\dfrac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)} > 0$;

в) $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0$;

г) $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x} < 0$;

д) $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$;

е) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-6x+8)} \le 2{,}5$;

ж) $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \dfrac{1}{2}$;

з) $\dfrac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)} < \dfrac{1}{2}$;

и) $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1} \le 1$;

к) $\dfrac{\log_{0,5}^2 x-6\log_{0,5} x+6}{\log_{0,5} x-1} > -2$;

л) $\log_x(x+1) < -\log_x(2-x)$;

м) $\log_x \dfrac{8-12x}{x-6} > 5$;

н) $\log_2 \sin x+1 \le 0$;

о) $\log_{\frac{1}{2}} \cos x-\dfrac{1}{2} \ge 0$;

п) $\log_{2\cos x}(2\sin x) < 0$;

р) $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x}(\operatorname{tg} x) \ge 0$.

*Ответы*: а) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; \infty\right)$; б) $(-\infty; 2)\cup(8; \infty)$; в) $\left(-\infty; \dfrac{7}{3}\right)\cup(3; \infty)$; г) $(0; 4)$; д) $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$; е) $[1; 4]$; ж) $(5; \infty)$; з) $(-2; 13)$; и) $(0; 10)\cup\{100\}$; к) $\left(0; \dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$; л) $(0; 1)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$; м) $\left(\dfrac{2}{3}; 1\right)\cup(2; 6)$; н) $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$;

о) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$;

п) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$;

р) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$.

**VII. Подведение итогов урока**

## Урок 33. Переход к новому основанию логарифма

***Цель***: найти связь между логарифмами с разными основаниями от данного числа.

### Ход урока

**I. Сообщение темы и цели урока**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

Решите неравенство:

1) $\log_6(x^2-5x)>1$;

2) $\log_{0,4}\frac{3x+1}{x-2}\geq 1$;

3) $x^{3\log_2 x+1}\leq 16$.

**Вариант 2**

Решите неравенство:

1) $\log_4(x^2+3x)>1$;

2) $\log_{0,3}\frac{3x-1}{x+2}\geq 1$;

3) $x^{4\log_3 x-2}\leq 9$.

**III. Изучение нового материала**

В процессе изучения темы встречались логарифмы с самыми разными основаниями. Возникает естественный вопрос: существует ли связь между логарифмами с разными основаниями данного числа, т. е. как связаны между собой $\log_a b$ и $\log_c b$? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

**Теорема.** Если $a$, $b$, $c$ – положительные числа и $a, c \neq 1$, то выполняется равенство $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (формула перехода к новому основанию логарифма).

Докажем это утверждение. Введем обозначения: $x = \log_a b$, $y = \log_c b$, $z = \log_c a$. Надо доказать, что $x = \dfrac{y}{z}$. Из введенных обозначений следует, что $a^x = b, c^y = b, c^z = a$. Последнее равенство возведем в степень $x$ и получим: $(c^z)^x = a^x$ или $c^{zx} = a^x$. Сравнивая это равенство с равенствами $a^x = b = c^y$, имеем: $c^{zx} = c^y$, откуда $zx = y$ и $x = \dfrac{y}{z}$, т. е. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

***Пример 1***

По полученной формуле перехода к новому основанию логарифма, например, имеем: $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} = \dfrac{\log_5 5}{\log_5 3} = \dfrac{\log_7 5}{\log_7 3} = \ldots$

Формула полезна тем, что позволяет переходить в логарифмах к любому новому основанию, необходимому по условию задачи.

***Пример 2***

Вычислим выражение $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$.

Так как основания логарифмов разные, то перейдем к одному основанию, например 3. При этом $\log_4 9 = \dfrac{\log_3 9}{\log_3 4} = \dfrac{2}{\log_3 2^2} = \dfrac{2}{2\log_3 2} = \dfrac{1}{\log_3 2}$ и $\log_5 2 = \dfrac{\log_3 2}{\log_3 5}$. Тогда получаем: $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2 = \log_3 5 \cdot \dfrac{1}{\log_3 2} \cdot \dfrac{\log_3 2}{\log_3 5} = 1$.

***Пример 3***

Решим уравнение $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 5{,}5$.

В логарифмах перейдем к одному основанию, например числу 2. Получаем: $\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} = 5{,}5$ или $\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x +$

$+\frac{1}{3}\log_2 x = 5,5$. Чтобы избавиться от дробных множителей, умножим все члены уравнения на число 6. Имеем: $6\log_2 x + 3\log_2 x + 2\log_2 x = 33$ или $11\log_2 x = 33$, откуда $\log_2 x = 3$ и $x = 2^3 = 8$.

***Пример 4***

Решим уравнение $\log_2 x + \log_5 x = \frac{1}{\lg 5}$.

Перейдем в логарифмах к основанию 5 и получим: $\frac{\log_5 x}{\log_5 2} + \log_5 x = \log_5 10$, или $\log_5 x \cdot (1 + \log_5 2) = \log_5 10 \cdot \log_5 2$, или $\log_5 x \cdot (\log_5 5 + \log_5 2) = \log_5 10 \cdot \log_5 2$, или $\log_5 x \cdot \log_5 10 = \log_5 10 \cdot \log_5 2$. Так как $\log_5 10 \neq 0$, то, разделив обе части уравнения на эту величину, получим $\log_5 x = \log_5 2$, откуда $x = 2$.

Разумеется, формула перехода к новому основанию используется и при решении более сложных задач.

***Пример 5***

Найдем: а) $\log_2 3$, если $\log_{12} 128 = a$; б) $\log_{175} 56$, если $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$; в) $\lg (0,175)^4$, если $\lg 196 = c$, $\lg 56 = d$.

а) $$\log_{12} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 12} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 (2^2 \cdot 3)} = \frac{7}{\log_2 2^2 + \log_2 3} = \frac{7}{2 + \log_2 3} = a.$$

Тогда имеем: $7 = 2a + a\log_2 3$ и $\log_2 3 = \frac{7 - 2a}{a}$.

б) $$\log_{175} 56 = \frac{\log_{14} 56}{\log_{14} 175} = \frac{\log_{14}(2^3 \cdot 7)}{\log_{14}(5^2 \cdot 7)} = \frac{\log_{14} 2^3 + \log_{14} 7}{\log_{14} 5^2 + \log_{14} 7} =$$

$$= \frac{3\log_{14} 2 + \log_{14} 7}{2\log_{14} 5 + \log_{14} 7} = \frac{3\log_{14} 2 + a}{2b + a} = \frac{3\log_{14}\frac{14}{7} + a}{2b + a} =$$

$$= \frac{3(\log_{14} 14 - \log_{14} 7) + a}{2b + a} = \frac{3(1 - a) + a}{2b + a} = \frac{3 - 2a}{2b + a}.$$

В данном примере необходимо было найти $\log_{14} 2$, поэтому число 2 пришлось выразить через числа 14 и 7 ($2 = 14/7$), логарифмы которых по основанию 14 были известны.

в) $$\lg(0,175)^4 = 4\lg 0,175 = 4\lg\frac{175}{1000} = 4\lg\frac{7}{40} = 4(\lg 7 - \lg 40) =$$

$$= 4[\lg 7 - \lg(10 \cdot 2^2)] = [\lg 7 - (\lg 10 + 2\lg 2)] = 4(\lg 7 - 2\lg 2 - 1).$$

Таким образом, задача будет решена, если удастся найти lg7 и lg2 по известным значениям lg196 = $c$ и lg56 = $d$. Имеем: $\lg 196 = \lg(2^2 \cdot 7^2) = 2\lg(2\cdot 7) = 2(\lg 2 + \lg 7) = c$; $\lg 56 = \lg(2^3\cdot 7) =$ $= \lg 2^3 + \lg 7 = 3\lg 2 + \lg 7 = d$. Если обозначить $\lg 2 = x$, $\lg 7 = y$, то для их определения получаем систему линейных уравнений: $\begin{cases} 2x+2y=c, \\ 3x+y=d. \end{cases}$ Из нижнего уравнения имеем: $y = d - 3x$. Подставляя это выражение в верхнее уравнение, получим: $2x+2(d-3x)=c$ или $-4x+2d=c$, откуда $x=\dfrac{2d-c}{4}$. Тогда $y=d-3\cdot\dfrac{2d-c}{4}=\dfrac{3c-2d}{4}$.

Учтем, что $\lg(0{,}175)^4 = 4(y-2x-1) = 4\left(\dfrac{3c-2d}{4}-2\dfrac{2d-c}{4}-1\right)=$ $=5c-6d-4.$

***Пример 6***

Решим уравнение $\sqrt{\log_{0,04}(x-1)+1}+\sqrt{\log_{0,2}(x-1)+3}=1.$

Установить ОДЗ этого уравнения достаточно трудно, так как пришлось бы решать логарифмические неравенства, поэтому отметим пока что $x > 1$. Перейдем в первом логарифме к основанию 0,2: $\log_{0,04}(x-1)=\dfrac{\log_{0,2}(x-1)}{\log_{0,2}0{,}04}=\dfrac{1}{2}\log_{0,2}(x-1)$ – и введем замену $y=\log_{0,2}(x-1)$. Тогда уравнение имеет вид: $\sqrt{\dfrac{y}{2}+1}+\sqrt{y+3}=1$. Определим ОДЗ этого уравнения из условий $\begin{cases} \dfrac{y}{2}+1\ge 0, \\ y+3\ge 0, \end{cases}$ т. е. $y\in[-2;+\infty)$. Решим это уравнение, уединив один радикал $\sqrt{\dfrac{y}{2}+1}=1-\sqrt{y+3}$ и возведя равенство в квадрат: $\dfrac{y}{2}+1=$ $=1-2\sqrt{y+3}+y+3$. Тогда $4\sqrt{y+3}=y+6$. Еще раз возведя в квадрат, получим: $16y+48=y^2+12y+36$ или $y^2-4y-12=0$. Корни этого уравнения $y_1=-2$, $y_2=6$ входят в ОДЗ исходного уравнения, однако проверка показывает, что $y_2=6$ исходному уравнению не удовлетворяет.

Итак, получаем простейшее логарифмическое уравнение: $\log_{0,2}(x-1)=-2$, откуда $x-1=0{,}2^{-2}=25$ и $x=26$.

Отметим два следствия из приведенной теоремы, которые достаточно часто используются при решении задач (предлагается доказать самостоятельно).

**Следствие 1.** Если $a$ и $b$ положительные числа, отличные от 1, то справедливо равенство $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

**Следствие 2.** Если $a$ и $b$ положительные числа и $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливо равенство $\log_a b = \log_{a^r} b^r$.

**IV. Задание на уроке**

§ 46, № 1 (а, б); 2; 5 (в, г); 7 (а); 8 (б); 9 (а, г); 10 (а); 11; 13 (а); 14 (б); 15 (а); 16 (б).

**V. Задание на дом**

§ 46, № 1 (в, г); 3; 5 (а, б); 7 (б); 8 (а); 9 (б, в); 10 (б); 12; 13 (б); 14 (а); 15 (б); 16 (а).

**VI. Творческие задания**

1. Упростите выражение:

а) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$;

б) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$;

в) $a^{\frac{2}{\log_b a}+1} b - 2a^{\log_a b+1} b^{\log_b a+1} + ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$;

г) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$.

*Ответы*: а) 10; б) 890; в) $ab(a-b)^2$; г) $\log_a b$.

2. Решите уравнение:

а) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \dfrac{2}{3}$;

б) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

в) $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0{,}5$;

г) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;

д) $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$;

е) $\log_{x+1}(x-0{,}5) = \log_{x-0{,}5}(x+1)$;

ж) $\sqrt{1+\log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$;

з) $\sqrt{8\log_4 x - 2} + \sqrt{1+\log_2 x} = 4$.

*Ответы*: а) $\dfrac{1}{9}$; 9; б) 64; в) 2; г) $\sqrt{3}$; 3; д) 2; е) 1; ж) $\dfrac{1}{9}$; з) 8.

**VII. Подведение итогов урока**

# Уроки 34–35. Дифференцирование показательной и логарифмической функций

***Цель***: привести формулы для производных показательной и логарифмической функций.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Выведите формулу $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (где $a, b > 0$; $a, b \neq 1$).

2. Известно, что $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. Вычислите $\log_4 12$.

3. Решите уравнение $3\log_3^2 x = \dfrac{5}{\log_x 3} + 2$.

**Вариант 2**

1. Выведите формулу $\log_a b = \log_{a^r} b^r$ (где $a, b > 0$; $a \neq 1$, $r \neq 0$).

2. Известно, что $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. Вычислите $\lg 18$.

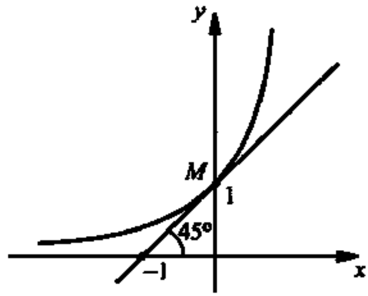
3. Решите уравнение $2\log_2^2 x = \dfrac{5}{\log_x 2} + 3$.

### III. Изучение нового материала

**1. Число *e*. Функция $y = e^x$, ее свойства, график, дифференцирование**

Графики показательной функции изображались гладкими линиями, к которым в каждой точке можно провести касательную. Существование касательной к графику функции $y = a^x$ в точке $x_0$ означает ее дифференцируемость в этой точке. Поэтому показательная функция **дифференцируема в каждой точке** области определения.

Будем строить графики показательной функции $y = a^x$ для различных оснований $a$ и касательные к ним в точке $M(0; 1)$. Эти касательные образуют различные углы с осью абсцисс. В курсе математического анализа доказывается, что при определенном значении $a \in (2; 3)$ такая **касательная** образует **угол 45°** с осью $OX$. При этом **угловой коэффициент** такой касательной (или производная функции $y = a^x$ при $x = 0$) равен 1. Это число $a$ обозначают буквой $e$. Доказано, что **число $e$ иррациональное** (поэтому записывается в виде бесконечной десятичной непериодической дроби) и приближенно равно $e \approx 2{,}718\ldots$. Функцию $y = e^x$ называют **экспонентой**.




Итак, существует такое число $e$ ($e \approx 2{,}718$), что показательная функция $y = e^x$ в точке $x = 0$ имеет производную, равную 1, т. е. $\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1$ при $\Delta x \to 0$.

Сначала найдем формулу для производной экспоненты.

**Теорема.** Функция $y = e^x$ дифференцируема в каждой точке области определения и $(e^x)' = e^x$. Докажем это. Найдем приращение функции $y = e^x$ в точке $x_0$. Получаем $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)$. Вычислим отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$ при $\Delta x \to 0$. Тогда по определению производной получаем $y' = e^x$ или $(e^x)' = e^x$ при любом $x$.

***Пример 1***

Найдем производную функции: а) $y = e^{-3x}$; б) $y = e^{\operatorname{tg} x}$.

Данные функции являются сложными. Поэтому используем правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных. Получаем:

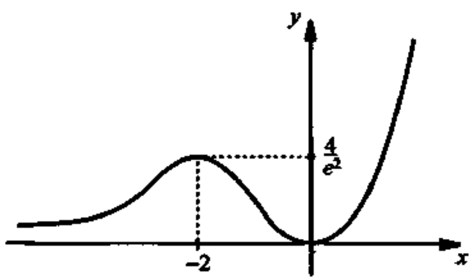
а) $(e^{-3x})' = e^{-3x} \cdot (-3x)' = -3e^{-3x}$;

б) $(e^{\operatorname{tg} x})' = e^{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$.

***Пример 2***

Построим график функции $y = x^2 \cdot e^x$.


Область определения этой функции – все действительные числа, т. е. $x \in R$. При $x \neq 0$ функция принимаст положительные значения $y > 0$, при $x = 0$ значение функции $y = 0$. Найдем производную функции, используя правило дифференцирования произведения функций: $y' = (x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$. Так как при всех значениях $x$ величина $e^x > 0$, то производная обращается в 0 в двух точках: $x = 0$ и $x = -2$. Отметим эти точки на координатной оси и проставим знаки производной в трех интервалах. Видно, что при $x = -2$ функция имеет максимум $y_{max} = (-2)^2e^{-2} = \dfrac{4}{e^2} \approx 0,5$, при $x = 0$ – минимум $y_{min} = 0^2e^0 = 0$. Теперь легко построить график данной функции.




***Пример 3***

При всех значениях параметра $a$ определим число решений уравнения $x^2e^x = a$.

Воспользуемся результатами предыдущей задачи. Для этого в одной системе координат надо построить графики двух функций $y_1 = x^2e^x$ (уже построен) и $y_2 = a$ (прямая, параллельная оси абсцисс). Тогда очевидно, что при $a \in \{0\} \cup \left(\dfrac{4}{e^x}; \infty\right)$ имеется только одно решение, при $a \in \left(0; \dfrac{4}{e^x}\right)$ существуют три решения, а при $a = \dfrac{4}{e^2}$ – два решения.

*Пример 4*

Напишем уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^2e^x$ в точке с абсциссой $x_0=-1$.

Воспользуемся результатами примера 2 и вычислим значение производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке $x_0=-1$. Получаем: $f'(-1)=-1\cdot e^{-1}\cdot(2-1)=-\frac{1}{e}$ и $f(-1)=(-1)^2e^{-1}=\frac{1}{e}$. Подставим эти величины в уравнение касательной $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Тогда имеем: $y=-\frac{1}{e}(x+1)+\frac{1}{e}$ или $y=-\frac{x}{e}$.

**2. Натуральные логарифмы. Функция $y=\ln x$, ее свойства, график, дифференцирование**

При вычислениях часто используются логарифмы по основанию $e$. Так как число $e$ положительно и не равно 1, то такие логарифмы определены. Напомним, что подобные логарифмы (**по основанию $e$**) называются **натуральными** и обозначаются символом ln, т. е. $\ln x=\log_e x$.

*Пример 5*

Вычислим $\ln\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}$. Сначала преобразуем логарифмируемую величину, используя понятие рационального показателя степени. Получаем: $\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}=\left(e\left(e\cdot e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(e\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(e\cdot e^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(e^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{7}{8}}$.

Теперь легко вычислить и сам логарифм: $\ln\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}=\ln e^{\frac{7}{8}}=\frac{7}{8}$.

Прежде всего покажем, что производная $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Используя определение логарифма, запишем тождество $x=e^{\ln x}$ и найдем производную от обеих частей этого равенства: $x'=(e^{\ln x})'$, или $1=e^{\ln x}\cdot(\ln x)'$, или $1=x\cdot(\ln x)'$, откуда $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

*Пример 6*

Найдем производную функции: а) $y=\ln(4x+3)$; б) $y=\ln(7x^2+5x)$.

Приведенные функции являются сложными. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим:

а) $y' = \dfrac{1}{4x+3} \cdot (4x+3)' = \dfrac{4}{4x+3}$;

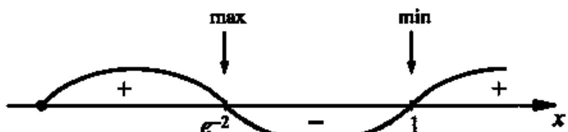
б) $y' = \dfrac{1}{7x^2+5x} \cdot (7x^2+5x)' = \dfrac{14x+5}{7x^2+5x}$.

Производная логарифмической функции используется во многих прикладных задачах.

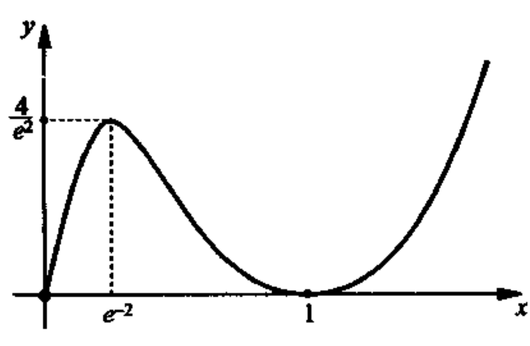
***Пример 7***

Исследуем функцию $y = x\ln^2 x$ и построим ее график.

Область определения этой функции – множество положительных чисел. При всех $x \neq 1$ значения функции положительны, при $x = 1$ функция $y = 0$. Найдем производную данной функции: $y' = (x\ln^2 x)' = x' \cdot \ln^2 x + x(\ln^2 x)' = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$. Производная обращается в нуль в точках $x = 1$ и $x = e^{\ 2}$. Отметим эти точки на координатной оси и расставим знаки производной в промежутках.




Видно, что функция $y(x)$ возрастает на промежутках $(0; e^{-2}]$ и $[1; \infty)$ и убывает на промежутке $[e^{-2}; 1]$. В точке $x = e^{-2} \approx 0{,}12$ функция имеет максимум $y_{max} = y(e^{-2}) = e^{-2}(\ln e^{-2}) = \dfrac{4}{e^2} \approx 0{,}5$ и в точке $x = 1$ – минимум $y_{min} = y(1) = 1 \cdot \ln^2 1 = 0$. Теперь легко построить график функции $y(x)$. На рисунке представлен эскиз графика (не соблюден масштаб).



***Пример 8***

При различных значениях параметра $a$ определим число решений уравнения $x\ln^2 x = a$.

В одной системе координат построим графики функций $y_1 = x\ln^2 x$ (уже построен) и $y_2 = a$ (горизонтальная прямая). Тогда легко ответить на вопрос задачи. При $a \in (-\infty; 0)$ уравнение решений не имеет (0 решений), при $a \in \{0\} \cup \left(\frac{4}{e^2}; \infty\right)$ – 1 решение; при $a \in \left(0; \frac{4}{e^2}\right)$ – три решения; при $a = \frac{4}{e^2}$ – два решения.

***Пример 9***

Напишем уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x\ln^2 x$ в точке $x_0 = e$.

Найдем значение производной $f(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке $x_0 = e$ и получим $f'(e) = \ln e \cdot (\ln e + 2) = 3$ и $f(e) = e \cdot \ln^2 e = e$ (воспользовались результатами примера 7). Подставим эти величины в уравнение касательной $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Имеем: $y = 3(x - e) + e = 3x - 2e$. Итак, уравнение касательной $y = 3x - 2e$.

Теперь обобщим полученные формулы. Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$. Запишем ее в виде $y = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$ и найдем производную $y' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \cdot (x\ln a)' = a^x \ln a$. Итак, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Рассмотрим функцию $y = \log_a x$. Запишем ее в виде $y = \frac{\ln x}{\ln a}$ и найдем производную: $y' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$. Итак, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$.

***Пример 10***

Найдем производную функции: а) $y = 7^x$; б) $y = \log_5 x$.

Используя приведенные формулы, получим:

а) $y' = 7^x \ln 7$; б) $y' = \frac{1}{x\ln 5}$.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Напишите формулы для нахождения производных функций $y = e^x$ и $y = a^x$.

2. Приведите формулы для нахождения производных функций $y = \ln x$ и $y = \log_a x$.

**V. Задание на уроках**

§ 47, № 1 (б); 2 (а, б); 4 (в); 6 (а); 8 (б); 10 (а, б); 13 (в, г); 16 (а, б); 17 (в, г); 19 (а); 20 (б); 24 (б); 27 (а); 28 (а, в).

**VI. Задание на дом**

§ 47, № 1 (г); 2 (в, г); 4 (г); 6 (в); 8 (г); 10 (в, г); 13 (а, б); 16 (в, г); 17 (а, б); 19 (б); 20 (а); 24 (в); 27 (б); 28 (б, г).

**VII. Подведение итогов уроков**

## Уроки 36–37. Контрольная работа по теме «Показательная и логарифмическая функции»

***Цель***: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Варианты контрольной работы**

**Вариант 1**

1. Найдите значение выражения $27^{\log_3 2} + \log_{18} 2 + 2\log_{18} 3$.

2. Найдите производную функции $y = 3e^x + 2\ln x$.

3. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{3^{7x-2} - 9}$.

4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(4x+3) \geq -2$.

5. Решите уравнение $3^{x+3} - 2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 180$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\log_3(x-1) + 3\log_2 y = 7, \\ 5\log_3(x-1) + \log_2 y = 11. \end{cases}$

**Вариант 2**

1. Найдите значение выражения $8^{\log_2 3} + 2\log_{12} 2 + \log_{12} 3$.

2. Найдите производную функции $y = 5e^x - 3\ln x$.

3. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{2^{4x-3}-16}$.

4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(7x-4)\geq -1$.

5. Решите уравнение $2^{x-1}-3\cdot 2^{x}+7\cdot 2^{x+1}=92$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}3\log_2 x+4\log_3(y+1)=11,\\ 4\log_2 x+\log_3(y+1)=6.\end{cases}$

**Вариант 3**

1. Найдите значение выражения $\log_3^2\sqrt{3}+\log_8\log_{13}169$.

2. Найдите производную функции $y=5\cdot 2^{x}-3\log_4 x$.

3. Найдите область определения функции $f(x)=7\sqrt{\log_2^2 x-4\log_2 x+3}$.

4. Решите неравенство $\log_{0,2}(4^{x}+12)\leq \log_{0,2}(7\cdot 2^{x})$.

5. Решите уравнение $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}3^{x}\cdot 2^{y}=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4.\end{cases}$

**Вариант 4**

1. Найдите значение выражения $\log_2^3\sqrt{2}+\log_4\log_{14}196$.

2. Найдите производную функции $y=3\cdot 5^{x}+2\log_7 x$.

3. Найдите область определения функции $f(x)=5\sqrt{\log_3^2 x-\log_3 x-2}$.

4. Решите неравенство $\log_{0,7}(9^{x}+18)\leq \log_{0,7}(11\cdot 3^{x})$.

5. Решите уравнение $2^{\sin^2 x}+5\cdot 2^{\cos^2 x}=7$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}3^{x}\cdot 2^{y}=972,\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2.\end{cases}$

**Вариант 5**

1. Найдите lg 56, если $\lg 2=a$ и $\log_2 7=b$.

2. Найдите производную функции $y=3\cdot 4^{2x+1}-2\log_3(5x-2)$.

3. Найдите области определения и значений функции $f(x)=\sqrt{2^{2x}-2^{x+3}+15}$.

4. Решите неравенство $\lg\sin x\geq \lg\cos x+\lg 2$.

5. Решите уравнение $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{x}+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^{x}=10$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5, \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y}} = 4. \end{cases}$

**Вариант 6**

1. Найдите $\log_{30}8$, если $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.

2. Найдите производную функции $y = 5 \cdot 3^{4x-1} + 3\log_2(5x+3)$.

3. Найдите области определения и значений функции $f(x) = \sqrt{3^{2x} - 3^{x+2} + 20}$.

4. Решите неравенство $\log_2 \sin x + \log_2 \cos x \le -2$.

5. Решите уравнение $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2. \end{cases}$

# Урок 38. Итоги контрольной работы

***Цели***: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

## Ход урока

### I. Сообщение темы и целей урока

### II. Итоги контрольной работы

### III. Ответы и решения

***Ответы***

**Вариант 1**

1. 9.

2. $y' = 3e^x + \dfrac{2}{x}$.

3. $\left[\dfrac{4}{7}; \infty\right)$.

4. $\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}\right]$.

5. 2.

6. (10; 2).

**Вариант 2**

1. 28.

2. $y' = 5e^x - \frac{3}{x}$.

3. $\left[\frac{7}{4}; \infty\right)$.

4. $\left(\frac{4}{7}; 1\right]$.

5. 3.

6. (2; 8).

**Вариант 3**

1. $\frac{7}{12}$.

2. $y' = 5 \cdot 2^x \ln 2 - \frac{3}{x \ln 4}$.

3. $(0; 2] \cup [8; \infty)$.

4. $(-\infty; \log_2 3] \cup [2; \infty)$.

5. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$.

6. (2; 6).

**Вариант 4**

1. $\frac{5}{8}$.

2. $y' = 3 \cdot 5^x \ln 5 + \frac{2}{x \ln 7}$.

3. $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [9; \infty)$.

4. $(-\infty; \log_3 2] \cup [2; \infty)$.

5. $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

6. (5; 3).

***Решения***

**Вариант 5**

1. Перейдем в $\log_2 7 = b$ к основанию 10 и получим: $\frac{\lg 7}{\lg 2} = b$, от-

куда $\lg 7 = b\cdot\lg 2 = ba$. Теперь вычислим: $\lg 56 = \lg(7\cdot 8) = \lg 7 + \lg 8 =$ $= \lg 7 + 3\lg 2 = ab + 3a$.

*Ответ*: $ab + 3a$.

2. Учтем правило дифференцирования сложной функции и получим: $y' = 3\cdot 4^{2x+1}\lg 4\cdot 2 - \dfrac{2}{(5x-2)\ln 3}\cdot 5 = 6\cdot 4^{2x+1}\ln 4 - \dfrac{10}{(5x-2)\ln 3}$.

*Ответ*: $y' = 6\cdot 4^{2x+1}\ln 4 - \dfrac{10}{(5x-2)\ln 3}$.

3. Область определения функции задается условием $2^{2x} - 2^{x+3} + 15 \geq 0$. Введем переменную $t = 2^x > 0$ и получим квадратное неравенство $t^2 - 8t + 15 \geq 0$. Его решение $t \in (0; 3]\cup[5; \infty)$. Вернемся к переменной $x$ и учтем, что функция $t = 2^x$ возрастающая. Получаем: $D(f) = (-\infty; \log_2 3]\cup[\log_2 5; \infty)$ – область определения функции. Область значений функции $E(f) = [0; \infty)$.

*Ответ*: $D(f) = (-\infty; \log_2 3]\cup[\log_2 5; \infty)$; $E(f) = [0; \infty)$.

4. Учтем, что $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, и запишем неравенство в виде: $\lg\sin x - \lg\cos x \geq \lg 2$, или $\lg\dfrac{\sin x}{\cos x} \geq \lg 2$, или $\operatorname{tg} x \geq 2$. С учетом ограничений запишем решение этого неравенства $x \in \left[\operatorname{arctg}2 + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

*Ответ*: $\left[\operatorname{arctg}2 + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

5. Учтем, что $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{5^2-(2\sqrt{6})^2} = 1$. Тогда $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$ и $(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = \dfrac{1}{(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x}$. Введем новую переменную $t = (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x = (5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} > 0$ и получим рациональное уравнение $t + \dfrac{1}{t} = 10$ или $t^2 - 10t + 1 = 0$. Его корни $t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6} > 0$. Вернемся к старой переменной. Имеем два уравнения: $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5+2\sqrt{6}$ (его корень $x = 2$) и $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5-2\sqrt{6}$ (корень $x = -2$).

*Ответ*: 2; –2.

6. Запишем систему уравнений в виде $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5, \\ 2^{\cos x} \cdot 2^{\frac{1}{\cos y}} = 4 \end{cases}$ и введем новые переменные $a = 2^{\cos x}$ и $b = 2^{\frac{1}{\cos y}}$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} a+b=5, \\ a\cdot b=4. \end{cases}$ Решения этой системы $a = 1$, $b = 4$ и $a = 4$, $b = 1$. Вернемся к старым переменным. Имеем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2^{\cos x} = 1, \\ 2^{\frac{1}{\cos y}} = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}$ где $n, k \in Z$;

б) $\begin{cases} 2^{\cos x} = 4, \\ 2^{\frac{1}{\cos y}} = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \cos x = 2, \\ \dfrac{1}{\cos y} = 0. \end{cases}$ Эта система решений не имеет.

*Ответ*: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $n, k \in Z$.

**Вариант 6**

1. Найдем $\lg 2 = \lg\dfrac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - a$. Перейдем в $\log_{30} 8$ к основанию 10 и получим: $\log_{30} 8 = \dfrac{\lg 8}{\lg 30} = \dfrac{\lg 2^3}{\lg(10\cdot 3)} = \dfrac{3\lg 2}{\lg 10 + \lg 3} = \dfrac{3(1-a)}{1+b}$.

*Ответ*: $\dfrac{3(1-a)}{1+b}$.

2. Учтем правило дифференцирования сложной функции и получим: $y' = 5\cdot 3^{4x-1}\lg 3\cdot 4 + \dfrac{3}{(5x+3)\ln 2}\cdot 5 = 20\cdot 3^{4x-1}\ln 3 + \dfrac{15}{(5x+3)\ln 2}$.

*Ответ*: $y' = 20\cdot 3^{4x-1}\ln 3 + \dfrac{15}{(5x+3)\ln 2}$.

3. Область определения функции задается условием $3^{2x} - 3^{x+2} + 20 \ge 0$. Введем переменную $t = 3^x > 0$ и получим квадратное неравенство $t^2 - 9t + 20 \ge 0$. Решение этого неравенства $t \in (0; 4] \cup [5; \infty)$. Вернемся к переменной $x$ и учтем, что функция $t = 3^x$

возрастающая. Получаем $D(f)=(-\infty;\ \log_3 4]\cup[\log_3 5;\ \infty)$ – область определения функции. Область значений функции $E(f)=[0;\ \infty)$.

*Ответ*: $D(f)=(-\infty;\ \log_3 4]\cup[\log_3 5;\ \infty)$; $E(f)=[0;\ \infty)$.

4. Учтем, что $\sin x>0$, $\cos x>0$, и запишем неравенство в виде: $\log_2(\sin x\cdot\cos x)\le\log_2\frac{1}{4}$, или $\sin x\cdot\cos x\le\frac{1}{4}$, или $\sin 2x\le\frac{1}{2}$. С учетом ограничений запишем решение этого неравенства $x\in\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{12}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, где $n\in Z$.

*Ответ*: $x\in\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{12}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, где $n\in Z$.

5. Учтем, что $\sqrt{7+\sqrt{48}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{7^2-(\sqrt{48})^2}=1$. Тогда $\sqrt{7-\sqrt{48}}=\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}}$ и $(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x=\frac{1}{(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x}$. Введем новую переменную $t=(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x=(7+\sqrt{48})^{\frac{x}{2}}>0$ и получим рациональное уравнение $t+\frac{1}{t}=14$ или $t^2-14t+1=0$. Его корни $t_{1,2}=7\pm\sqrt{48}>0$. Вернемся к старой переменной. Имеем два уравнения: $(7+\sqrt{48})^{\frac{x}{2}}=7+\sqrt{48}$ (его корень $x=2$) и $(7+\sqrt{48})^{\frac{x}{2}}=7-\sqrt{48}$ (корень $x=-2$).

*Ответ*: 2; –2.

6. Запишем систему уравнений в виде $\begin{cases}81^{\operatorname{tg}x}\cdot 9^{\cos y}=3,\\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg}x}=2\end{cases}$ и введем новые переменные $a=9^{\cos y}$ и $b=81^{\operatorname{tg}x}$. Получаем систему уравнений $\begin{cases}ab=3,\\ a-b=2.\end{cases}$

Решения этой системы $a=3$, $b=1$ и $a=-1$, $b=-3$ (не подходит, т. к. $a,\ b>0$). Вернемся к старым переменным. Имеем систему уравнений $\begin{cases}9^{\cos y}=3,\\ 81^{\operatorname{tg}x}=1\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos y=\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg}x=0,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\\ x=\pi k,\end{cases}$ где $n,\ k\in Z$.

*Ответ*: $\left(\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, где $n,\ k\in Z$.

# Уроки 39–40. Зачетная работа по теме «Показательная и логарифмическая функция»

***Цель***: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

## Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Варианты зачетной работы**

**Вариант 1**

**А**

1. Известно, что $\log_a 27 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.

2. Вычислите: $25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}$.

3. Решите уравнение:

а) $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$;

б) $\log_7(6+7^{-x}) = 1+x$.

4. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{32-2x}$;

б) $\log_8(x^2-4x+3) \geq 1$.

5. Постройте график функции $y = \log_2 \frac{x^2-16}{x-4}$.

**В**

6. Вычислите: $2^{\frac{1}{\log_5 2}} + \log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

7. Решите уравнение: $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$.

8. Решите неравенство: $\log_3(x^2-2x-2) \leq 0$.

9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2. \end{cases}$

**С**

10. Решите уравнение: $5^{\operatorname{ctg}^2 x}\left(26 - 5^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right) = 5$.

11. Решите неравенство: $\frac{2}{2+\log_2 x} + \frac{1}{\log_2(2x)} \cdot \left(\frac{1}{2+\log_2 x} - 1\right) \geq 0$.

12. Решите систему: $\begin{cases} 4\log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y, \\ \log_2 x^2 \geq \log_2 y. \end{cases}$

**Вариант 2**

**А**

1. Известно, что $\log_a 4 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{a}$.

2. Вычислите: $36^{\frac{1}{\log_5 6}} + 64^{\frac{1}{\log_7 8}}$.

3. Решите уравнение:

а) $3^{|3x-4|} = 9^{2x-2}$;

б) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

4. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{3}{5}\right)^{6x-x^2+10} < \frac{27}{125}$;

б) $\log_5(x^2 + x - 1) \geq 1$.

5. Постройте график функции $y = \log_3 \frac{x^2-9}{x-3}$.

**В**

6. Вычислите: $3^{\frac{1}{\log_4 3}} + \log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

7. Решите уравнение: $9 \cdot 4^x + 5 \cdot 6^x = 4 \cdot 9^x$.

8. Решите неравенство: $\log_2(x^2 - 13x + 42) \leq 1$.

9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(x - y) = 4. \end{cases}$

**С**

10. Решите уравнение: $3^{\cos 2x}(4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$.

11. Решите неравенство: $\frac{3}{\log_5 x - 4} - \frac{2}{\log_5 \frac{x}{125}} \cdot \left(\frac{1}{\log_5 x - 4} + 1\right) \leq 0$.

12. Решите систему: $\begin{cases} \log_2^2 x + 1 = \log_2 y^2, \\ \log_2 x \geq \log_2 y. \end{cases}$

**III. Ответы и решения**

**Вариант 1**

***Ответы***

1. $\frac{1}{b}$.

2. 100.

3. а) $x = 1{,}4$; б) $x = 0$.

4. а) $x \in (-\infty; -8) \cup (4; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

5. График построен.

6. 3.

7. $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

8. $x \in [-1; 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}; 3]$.

9. $x = 5$, $y = 2$.

***Решения***

10. Учтем, что $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, и запишем уравнение в виде: $5^{\frac{1}{\sin^2 x}-1} \cdot \left(26 - 5^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right) = 5$. Введем новую переменную $y = 5^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. Получаем уравнение: $\frac{1}{5} y(26-y) = 5$ или $y^2 - 26y + 25 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = 25$. Вернемся к старой переменной. Имеем два простейших уравнения:

а) $5^{\frac{1}{\sin^2 x}} = 1 = 5^0$, откуда $\frac{1}{\sin^2 x} = 0$. Такое уравнение решений не имеет;

б) $5^{\frac{1}{\sin^2 x}} = 25 = 5^2$, откуда $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Используем формулу понижения степени: $\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}$, тогда $\cos 2x = 0$. Получаем: $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$ (где $n \in Z$).

*Ответ*: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, где $n \in Z$.

11. Преобразуем левую часть неравенства: $\frac{2}{2+\log_2 x} + \frac{1}{1+\log_2 x} \cdot \left(\frac{1}{2+\log_2 x} - 1\right) \geq 0$ и введем новую переменную $y = 2 + \log_2 x$. Имеем рациональное неравенство: $\frac{2}{y} + \frac{1}{y-1}\left(\frac{1}{y} - 1\right) \geq 0$ или $\frac{1}{y} \geq 0$

и $y \neq 1$. Решение этого неравенства $y > 0$ и $y \neq 1$. Вернемся к старой переменной. Получаем неравенства: $2 + \log_2 x > 0$ и $2 + \log_2 x \neq 1$, решение которых $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

*Ответ*: $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

12. Из уравнения системы выразим $\log_2 y = \frac{4\log_2^2 x + 1}{2}$ и подставим в неравенство. Получаем: $\log_2 x^2 \geq \frac{4\log_2^2 x + 1}{2}$, или $0 \geq 4\log_2^2 x - 4\log_2 x + 1$, или $0 \geq (2\log_2 x - 1)^2$, откуда $\log_2 x = \frac{1}{2}$. Тогда $\log_2 y = \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{2} = 1$. Решая простейшую систему: $\log_2 x = \frac{1}{2}$ и $\log_2 y = 1$, находим $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $y = 2^1 = 2$.

*Ответ*: $x = \sqrt{2}$, $y = 2$.

**Вариант 2**

***Ответы***

1. $\frac{1}{b}$.
2. 74.
3. а) $x = \frac{8}{7}$; б) $x = 2$.
4. а) $x \in (-1; 7)$; б) $x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.
5. График построен.
6. 1.
7. $x = 2$.
8. $x \in [5; 6) \cup (7; 8]$.
9. $x = 2$, $y = 6$.

***Решения***

10. Учтем, что $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, и запишем уравнение в виде: $3^{1-2\sin^2 x}(4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$, или $4 \cdot 3^{1-\sin^2 x} - 3^{3-2\sin^2 x} = 1$, или $4 \cdot 3^{\cos^2 x} - 3^{1+2\cos^2 x} = 1$. Введем новую переменную $y = 3^{\cos^2 x}$. Получа-

ем уравнение: $4y - 3y^2 = 1$ или $3y^2 - 4y + 1 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{1}{3}$. Вернемся к старой переменной. Имеем два простейших уравнения:

а) $3^{\cos^2 x} = 1 = 3^0$, откуда $\cos^2 x = 0$ и $\cos x = 0$. Решение этого уравнения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$.

б) $3^{\cos^2 x} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$, откуда $\cos^2 x = -1$. Такое уравнение решений не имеет.

*Ответ*: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$.

11. Преобразуем левую часть неравенства: $\frac{3}{\log_5 x - 4} - \frac{2}{\log_5 x - 3} \cdot \left(\frac{1}{\log_5 x - 4} + 1\right) \le 0$ – и введем новую переменную $y = \log_5 x - 4$. Имеем рациональное неравенство: $\frac{3}{y} - \frac{2}{y+1}\left(\frac{1}{y} + 1\right) \le 0$ или $\frac{1}{y} \le 0$ и $y \ne -1$. Решение этого неравенства $y < 0$ и $y \ne -1$. Вернемся к старой переменной. Получаем неравенства: $\log_5 x - 4 < 0$ и $\log_5 x - 4 \ne -1$, решение которых $x \in (0;125) \cup (125;625)$.

*Ответ*: $x \in (0;125) \cup (125;625)$.

12. Из уравнения системы $\log_2^2 x + 1 = \log_2 y^2$ или $\log_2^2 x + 1 = 2\log_2 y$ выразим $\log_2 y = \frac{\log_2^2 x + 1}{2}$ и подставим в неравенство. Получаем: $\log_2 x \ge \frac{\log_2^2 x + 1}{2}$, или $0 \ge \log_2^2 x - 2\log_2 x + 1$, или $0 \ge (\log_2 x - 1)^2$, откуда $\log_2 x = 1$. Тогда $\log_2 y = \frac{1^2 + 1}{2} = 1$. Решая простейшую систему: $\log_2 x = 1$ и $\log_2 y = 1$, находим $x = 2^1 = 2$, $y = 2^1 = 2$.

*Ответ*: $x = 2$, $y = 2$.

# Глава 8. Первообразная и интеграл

## Первообразная

### Урок 41. Определение первообразной и ее общий вид

*Цель*: рассмотреть понятие первообразной функции и связь между первообразной и производными функциями.

**Ход урока**

**I. Сообщение темы и цели урока**

**II. Изучение нового материала**

Как известно из курса 10 класса, понятие производной в механике было связано с нахождением мгновенной скорости и ускорения по известному закону изменения перемещения от времени $S(t)$. Например, для равноускоренного движения зависимость $S(t)=S_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$, где $S_0$ и $v_0$ – начальное перемещение и скорость тела соответственно (т. е. перемещение и скорость в момент времени $t=0$); $a$ – ускорение. Найдя **производную от зависимости** $S(t)$, получим **закон изменения мгновенной скорости** от времени: $v(t)=S'(t)=v_0+at$. Вычислив производную от величины $v(t)$ (или вторую производную от функции $S(t)$), найдем закон изменения ускорения от времени: $a(t)=v'(t)=S''(t)=a$. В данном случае ускорение оказалось постоянным (не зависящим от времени). Поэтому такое движение называется равноускоренным, т. е. происходящим с одинаковым (равным) ускорением. Таким образом, операция **дифференцирования** (нахождения производной) по закону перемещения позволяет **находить скорость и ускорение тела.**

В механике очень часто возникает обратная задача: по известному закону изменения ускорения от времени $a(t)$ найти поведение скорости $v(t)$ и перемещения $S(t)$. Иными словами, по заданной производной $v'(t)$ (равной ускорению $a(t)$) надо восстановить саму функцию $v(t)$. Затем по известной производной $S'(t)$ (равной скорости $v(t)$) надо найти функцию $S(t)$.

Для решения подобных задач (восстановление функции по ее известной производной) служит операция интегрирования, обратная операции дифференцирования. Цель этой главы – постепенно познакомить учащихся с интегрированием функций. Для этого придется вводить ряд необходимых понятий.

**Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех $x$ из этого промежутка выполнено равенство $F'(x) = f(x)$.**

***Пример 1***

Функция $F(x) = x^5$ является первообразной для функции $f(x) = 5x^4$ на промежутке $(-\infty; \infty)$, т. к. для всех $x$ из этого интервала выполнено равенство $F'(x) = (x^5)' = 5x^4 = f(x)$.

Заметим, что функция $\overline{F}(x) = x^5 + \sqrt{3}$, например, также является первообразной для функции $f(x) = 5x^4$ на $R$, т. к. $\overline{F}'(x) = (x^5 + \sqrt{3})' = (x^5)' + (\sqrt{3})' = 5x^4 = F'(x) = f(x)$. Очевидно, если вместо числа $\sqrt{3}$ поставить любую постоянную величину, результат от этого не изменится. Следовательно, задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений (или говорят, что первообразная вычислена с точность до постоянной).

***Пример 2***

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на $R$, т. к. для всех $x$ из этого интервала выполнено равенство $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$. Так же как и в примере 1, функция $\overline{F}(x) = \sin x + c$ (где $c$ – любая постоянная величина) тоже первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на $R$, т. к. выполнено равенство $\overline{F}'(x) = f(x)$.

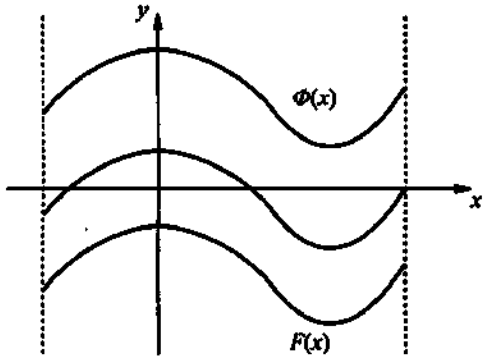
***Пример 3***

Для функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ на интервале $(0; \infty)$ первообразной является функция $F(x) = \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$, т. к. $F'(x) = \left(\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c\right)' = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}} = f(x)$.

Все первообразные для функции $f(x)$ можно записать с помощью одной формулы, которую называют общим видом первообразных для функции $f(x)$. Для этого используют теорему (основное свойство первообразных): любая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке имеет вид $\Phi(x) = F(x) + c$, где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке, $c$ – произвольная постоянная.

Докажем это утверждение. Найдем производную функции $\Phi'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x)$. По условию $F(x)$ – первообразная для функции и справедливо равенство $F'(x) = f(x)$. Но тогда выполнено и равенство $\Phi'(x) = f(x)$. Поэтому функция $\Phi(x)$ также первообразная для функции $f(x)$.

Основное свойство первообразной имеет простой геометрический смысл: графики любых двух первообразных $\Phi(x)$ и $F(x)$ для функции $f(x)$ получают друг из друга параллельным переносом вдоль оси ординат.




Теперь рассмотрим типичные задачи на применение основного свойства первообразной.

***Пример 4***

Найдем общий вид первообразных для функции $f(x) = x - 3x^2$ и первообразную $F_0(x)$, для которой $F_0(2) = 5$.

Можно догадаться, что одной из первообразных для функции $f(x)$ является функция $\frac{x^2}{2} - x^3$, т. к. $\left(\frac{x^2}{2} - x^3\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3x^2 = x - 3x^2$. По доказанной теореме общий вид первообразных для функции $f(x)$ может быть записан так: $F(x) = \frac{x^2}{2} - x^3 + c$.

Для нахождения постоянной $c$ используем данное условие. Подставим в функцию $F(x)$ значение $x = 2$ и получим уравнение: $5 = \frac{2^2}{2} - 2^3 + c$ или $5 = -6 + c$, откуда $c = 11$. Тогда искомая первообразная $F_0(x) = \frac{x^2}{2} - x^3 + 11$.

***Пример 5***

Найти первообразную $F_0(x)$ для функции $f(x) = 3\cos x$, если $F_0(2\pi) = 1$. Построить график функции $F_0(x)$.

Учитывая данные таблицы производных, найдем для функции $f(x)$ общий вид первообразных $F(x) = 3\sin x + c$. Действительно, выполнятся равенство $F'(x)=(3\sin x+c)'=3\cos x=f(x)$ для всех $x\in R$. Из всех этих первообразных $F(x)$ нас интересует только одна $F_0(x)$, удовлетворяющая условию $F_0(2\pi) = 1$. Поэтому для нахождения постоянной $c$ получаем уравнение: $1 = 3\sin 2\pi + c$ или $1 = c$. Тогда искомая первообразная $F_0(x) = 3\sin x + 1$.

**III. Контрольные вопросы**

1. Расскажите о применении интегрирования в механике.
2. Объясните основную цель интегрирования.
3. Дайте определение первообразной функции.
4. Приведите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и обоснуйте его.
5. Объясните геометрический смысл основного свойства первообразной.

**IV. Задание на уроке**

§ 48, № 1 (а, б); 2 (в, г); 12 (а, б); 14.

**V. Задание на дом**

§ 48, № 1 (в, г); 2 (а, б); 12 (в, г); 13.

**VI. Подведение итогов урока**

## Уроки 42–43. Таблица первообразных. Три правила нахождения первообразных

***Цель***: отработать практические навыки интегрирования.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Сформулируйте основное свойство первообразной.
2. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и напишите ту первообразную, график которой проходит через точку $A$:

а) $f(x) = 3 + x^2$, $A(1; 4)$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $A\left(\dfrac{3\pi}{4}; -2\right)$.

**Вариант 2**

1. Объясните геометрический смысл основного свойства первообразной.

2. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и напишите ту первообразную, график которой проходит через точку $A$:

а) $f(x) = 2 - x^3$, $A(1; -3)$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $A\left(\dfrac{5\pi}{4}; -4\right)$.

**III. Изучение нового материала**

Для дальнейшей работы необходимо знать первообразные для основных (изучаемых в школе) функций (см. таблицу) и правила интегрирования.

**Таблица первообразных для функций**

| Функция $f(x)$ | $k$ (постоянная) | $x^r (r \neq -1)$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $e^x$ | $a^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Первообразная $F(x)$ (общий вид) | $kx + c$ | $\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$ | $-\cos x + c$ | $\sin x + c$ | $\operatorname{tg} x + c$ | $-\operatorname{ctg} x + c$ | $e^x + c$ | $\dfrac{a^x}{\ln a}$ |

Приведенную таблицу легко проверить, выполнив обратную операцию – продифференцировать функцию $F(x)$ и сравнить результат с функцией $f(x)$ (рекомендуем сделать это самостоятельно).

Следующий шаг в изучении рассматриваемой темы – правила интегрирования и их применение для нахождения первообразных функций. Эти правила похожи на соответствующие правила дифференцирования.

**Правило 1. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то функция $F(x) + G(x)$ – первообразная для функции $f(x) + g(x)$.** Можно сформулировать короче: **первообразная для суммы функций равна сумме первообразных каждой функции.**

Используя определение первообразной, имеем: $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, тогда $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

***Пример 1***

Найдем первообразную для функции $f(x) = x^4 - \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Учтем, что функция $f(x) = x^4 - x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$ представляет собой алгебраическую сумму трех функций. Используя таблицу первообразных и правило 1, найдем: $F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\operatorname{ctg}x+c=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-$

$-\operatorname{ctg}x+c=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-\operatorname{ctg}x+c.$

**Правило 2. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а $k$ – постоянная, то функция $kF(x)$ – первообразная для функции $kf(x)$.** Или короче: **первообразная для произведения числа и функции равна произведению числа на первообразную функции.**

Исходя из определения первообразной и используя правило дифференцирования, получаем: $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$.

***Пример 2***

Найдем первообразную функции $f(x)=2\sqrt{3}\sin x$.

Используя рассмотренное правило и таблицу первообразных, получаем: $F(x)=2\sqrt{3}(-\cos x)+c=-2\sqrt{3}\cos x+c$.

**Правило 3. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то функция $\frac{1}{k}F(kx+m)$ – первообразная для функции $f(kx+m)$, где $k$ и $m$ – постоянные.** Короче: **первообразная для функции, зависящей от аргумента $kx+m$ (где $k$ и $m$ – постоянные), равна произведению числа $\frac{1}{k}$ на первообразную для функции от $x$ при значении аргумента $kx+m$.**

Учитывая правило дифференцирования сложной функции, получаем: $\left(\frac{1}{k}F(kx+m)\right)'=\frac{1}{k}F'(kx+m)\cdot k=F'(kx+m)=f(kx+m)$.

***Пример 3***

Найдем первообразную функции $f(x)=\cos(\sqrt{5}x+3)$.

Так как первообразная для функции $\cos x$ есть функция $\sin x$, то в соответствии с правилом 3 первообразная для функции $f(x)=\cos(\sqrt{5}x+3)$ – функция $F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5x}+3)+c$.

***Пример 4***

Найдем первообразную для функции $f(x)=\frac{1}{(8-5x)^7}$.

Запишем функцию в виде $f(x) = (-5x + 8)^{-7}$. Так как первообразная для функции $x^{-7}$ есть функция $\frac{x^{-6}}{-6} = -\frac{1}{6}x^{-6}$, то первообразная для $f(x)$ – функция $F(x) = -\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-5x+8)^{-6} + c = \frac{1}{30(8-5x)^6} + c.$

**Разумеется, три рассмотренных правила интегрирования можно использовать совместно.**

***Пример 5***

Найдем первообразную для функции $f(x) = 3\sqrt{5-2x} - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 7x^5 - 4.$

Учитывая правила 1 – 3, найдем первообразную для данной функции $F(x) = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 7\frac{x^6}{6} - 4x + c =$

$= -(5-2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{7}{6}x^6 - 4x + c.$

Как и ранее, разобранные правила используются и при решении физических задач.

***Пример 6***

Точка массой $m = 2$ кг движется вдоль оси $Ox$ под действием силы, направленной вдоль этой оси и равной $F(t) = 2t + 1 - 5\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Найдите закон $x(t)$ движения точки, если при $t = \frac{2}{3}$ с скорость точки равна $\frac{23}{9}$ м/с, координата равна $\frac{40}{81}$ м. Здесь $F$ – сила в ньютонах, $t$ – время в секундах, $x$ – путь в метрах.

По второму закону Ньютона $F = ma$ (где $a$ – ускорение тела), откуда $a = \frac{F}{m}$. Для данной задачи имеем: $a(t) = t + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Скорость тела $v(t)$ есть первообразная для ее ускорения $a(t)$. Поэтому находим $v(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{5}{2\pi}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + c_1$. Постоянную $c_1$ определим, используя начальное условие $v\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{9}$. Получаем равенство $\frac{23}{9}=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2\pi}\sin\pi+c_1$, откуда $c_1 = 2$. Тогда скорость тела меняется по закону $v(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-\frac{5}{2\pi}\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+2$.

Аналогично координата $x(t)$ есть первообразная для скорости $v(t)$. Поэтому получаем: $x(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{5}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right)+$ $+2t+c_2=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2+2t+\frac{5}{2\pi^2}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+c_2$. Для нахождения постоянной $c_2$ вновь используем начальное условие $x\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{40}{81}$. Имеем равенство: $\frac{40}{81}=\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{27}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{2\pi^2}\cos\pi+c_2$ или $\frac{40}{81}=\frac{121}{81}-\frac{5}{2\pi^2}+c_2$, откуда $c_2=\frac{5}{2\pi^2}-1$. Итак, закон движения точки $x(t)=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2+2t+$ $+\frac{5}{2\pi^2}\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{2\pi^2}-1$.

В заключение урока сделаем **ряд важных замечаний.**

1. Имеется существенное отличие в правилах интегрирования и дифференцирования. Не существует правил для нахождения первообразных от произведения функций, частного функций, сложной функции (при нахождении производных такие правила имеют место).

2. В связи с п. 1 процесс интегрирования намного сложнее операции дифференцирования. Например, нахождение первообразных для функций $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \sin 2x\cos 3x$, $f(x) = x\cos x$ и т. д. является достаточно сложной задачей и требует применения разнообразных приемов. В то же время вычисление производных от этих функций никакого труда не составляет.

3. В соответствии с п. 1 первообразные для некоторых функций (например, $f(x)=\frac{\sin x}{x^n}$, $f(x)=x^n\operatorname{tg}x$, $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}$, $f(x)=\sin x^2$ и т. д.) существуют, но не могут быть записаны с помощью элементарных функций.

4. Первообразная функция в курсе математического анализа называется неопределенным интегралом (в этом курсе понятия первообразной не существует). Причины такого термина будут понятны на следующих уроках.

**IV. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)**

1. Первообразные основных элементарных функций.
2. Три правила нахождения первообразных.

**V. Задание на уроках**

§ 48, № 3 (а); 5 (б, в); 6 (а, б); 7 (б, в); 8 (а, г); 9 (а, б); 10 (в, г); 11 (а, г); 15; 17 (а, б); 18 (а); 19; 20 (а); 21 (б, в); 22 (а).

**VI. Задание на дом**

§ 48, № 3 (б); 5 (а, г); 6 (в, г); 7 (а, г); 8 (б, в); 9 (в, г); 10 (а, б); 11 (б, в); 16; 17 (в, г); 18 (б); 20 (б); 21 (а); 22 (б).

**VII. Подведение итогов уроков**

## Уроки 44–45. Интегрирование функций с помощью их преобразования (факультативное занятие)

***Цель***: рассмотреть некоторые приемы интегрирования функций.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Найдите первообразную функции:

а) $f(x) = 3e^x + x^4 - \frac{4}{x} + 2;$

б) $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x.$

2. Найдите ту первообразную функцию $f(x) = 4x + 7$, график которой касается оси абсцисс.

**Вариант 2**

1. Найдите первообразную функции:

а) $f(x) = x^5 - 2e^x + \frac{3}{x} + 5;$

б) $f(x) = \sin x \cos x.$

2. Найдите ту первообразную функцию $f(x) = 6x - 4$, график которой касается оси абсцисс.

**III. Изучение нового материала**

Разумеется, первообразную можно найти только для тех функций, которые **приведены в таблице.** Поэтому основной принцип интегрирования – приведение более сложных функций к тем, которые даны в таблице. Существуют следующие **методы интегрирования:**

1. **Метод непосредственного (табличного) интегрирования** (был рассмотрен на предшествующих уроках).

2. **Метод замены переменной интегрирования.** Простейший случай линейной замены (нахождение первообразной функции $f(kx + m)$) был также рассмотрен на предыдущих занятиях.

3. **Метод преобразования функции в сумме функций** будет рассмотрен на этом уроке.

4. **Метод интегрирования по частям** достаточно сложен и будет изучаться в вузе.

Ранее отмечалось, что одна из сложностей при интегрировании состоит в отсутствии формул для первообразных произведения и частного функций. Поэтому необходимо произведение и частное функций представить в виде суммы функций (если это возможно). На примерах рассмотрим **самые типичные ситуации.**

***Пример 1***

Найдем первообразную функции $f(x) = (3x + 1)(2x - 3)$.

Умножим многочлены и запишем функцию в виде $f(x) = 6x^2 - 7x - 3$.

Первообразную такой функции уже легко найти: $F(x) = 6\cdot\dfrac{x^3}{3} -$

$-7\cdot\dfrac{x^2}{2} - 3x + c = 2x^3 - 3{,}5x^2 - 3x + c.$

***Пример 2***

Найдем первообразную функции $f(x) = \dfrac{8x^3 + 2x^2 - 3x + 5}{4x + 3}$.

В данной функции выделим целую часть. Для этого столбиком разделим числитель на знаменатель и получим: $f(x) = 2x^2 - x + \dfrac{5}{4x+3}$. Найдем первообразную такой функции: $F(x) = 2\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{4}\ln|4x+3| + c =$

$= \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{4}\ln|4x+3| + c.$

***Пример 3***

Найдем первообразную функции $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2 + 2x - 15}$.

Прежде всего заметим, что квадратный трехчлен $x^2 + 2x - 15$ имеет корни и может быть разложен на множители: $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$. Очевидно, что дробь $\frac{5x+1}{x^2+2x-15}$ может получиться при сложении дробей со знаменателями $x - 3$ и $x + 5$. При этом числители дробей неизвестны. Обозначим их величинами $a$ и $b$ соответственно (где $a$ и $b$ – некоторые числа) и представим дробь в виде $\frac{5x+1}{x^2+2x-15} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+5}$. В правой части равенства приведем дроби к общему знаменателю: $\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+5} = \frac{a(x+5)+b(x-3)}{(x-3)(x+5)} = \frac{ax+5a+bx-3b}{(x-3)(x+5)} = \frac{(a+b)x+(5a-3b)}{(x-3)(x+5)}$. Получили равенство $\frac{5x+1}{x^2+2x-15} = \frac{(a+b)x+(5a-3b)}{(x-3)(x+5)}$, которое выполняется, если $\begin{cases} 5 = a+b, \\ 1 = 5a-3b. \end{cases}$ Решение этой системы линейных уравнений $a = 2$ и $b = 3$. Таким образом, имеем: $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+2x-15} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+5}$. Теперь легко найти первообразную функции: $F(x) = 2\ln|x-3| + 3\ln|x+5| + c$.

***Пример 4***

Найдем первообразную функции $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}}$.

Избавимся от иррациональности в знаменателе функции. Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на величину, сопряженную знаменателю. Получаем: $f(x) = \frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})} = \frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})}{(x+1)-(x-3)} = \frac{1}{2}\left[(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+3)^{\frac{1}{2}}\right]$. Найдем первообразную этой функции: $F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + c = \frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+3)^{\frac{3}{2}}\right] + c$.

Очень часто при интегрировании дробей используют почленное деление числителя на знаменатель.

***Пример 5***

Найдем первообразную функции $f(x)=\dfrac{2x^3-5x\sin^2 x}{x^3\sin^2 x}$.

Почленно разделим числитель на знаменатель и запишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^3\sin^2 x}-\dfrac{5x\sin^2 x}{x^3\sin^2 x}=\dfrac{2}{\sin^2 x}-5x^{-2}$. Теперь легко найти первообразную функции: $F(x)=-2\mathrm{ctg}x-5\dfrac{x^{-1}}{-1}+c=-2\mathrm{ctg}x+\dfrac{5}{x}+c.$

***Пример 6***

Найдем первообразную функции $f(x)=\mathrm{tg}^2x$.

Используем основное тригонометрическое тождество и запишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$. Найдем первообразную этой функции: $F(x)=\mathrm{tg}\,x-x+c$.

При интегрировании тригонометрических функций часто используют различные **тригонометрические формулы**.

***Пример 7***

Найдем первообразную функции $f(x)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}{\cos^3\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}$.

Используем **формулу приведения** и преобразуем функцию: $f(x)=\dfrac{\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\right]}{\cos^3\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}{\cos^3\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}=\dfrac{1}{\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$. Найдем первообразную функции $F(x)=\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+c$.

***Пример 8***

Найдем первообразную функции $f(x)=(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2$.

Используя **метод вспомогательного угла**, преобразуем выражение $\sqrt{3}\cos x-\sin x$ и получим: $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x\right)=$ $=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos x-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin x\right)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. Тогда функция имеет вид

$f(x)=4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. Используем **формулу понижения степени** $f(x)=4\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}=2+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. Найдем первообразную такой функции $F(x)=2x+2\frac{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}+c=2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+c.$

***Пример 9***

Найдем первообразную функции $f(x)=\sin^4 x$.

Вновь дважды используем **формулу понижения степени** и запишем функцию в виде $f(x)=(\sin^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=$
$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$

Находим первообразную такой функции: $F(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+$ $+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+c=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c.$

И наконец, очень часто используют **формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму функций.**

***Пример 10***

Найдем первообразную функции $f(x)=\cos 7x\cdot\cos 3x$.

Преобразуем произведение косинусов в их сумму и запишем функцию в виде $f(x)=\cos 7x\cos 3x=\frac{1}{2}[\cos(7x-3x)+\cos(7x+3x)]=$ $=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 10x)=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 10x$. Найдем первообразную этой функции: $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\sin 10x+c=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{20}\sin 10x+c.$

**IV. Задания на уроках и дома**

Найдите первообразную функции:

1) $f(x)=(2x-1)(x+3)$;
2) $f(x)=(3x+2)(x-1)$;
3) $f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$;
4) $f(x)=(x+2)(x-2)(3x+1)$;
5) $f(x)=\frac{3x^4+2x^2+1}{\sqrt{x}}$;
6) $f(x)=\frac{2x^3+4x^2-3}{\sqrt{x}}$;

7) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$;
8) $f(x)=\dfrac{5x+2}{x+1}$;

9) $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+5}{x+1}$;
10) $f(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+5x-4}{x-1}$;

11) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$;
12) $f(x)=\dfrac{1}{3x+x^2}$;

13) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$;
14) $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x-x^2}$;

15) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}$;
16) $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2+3x-4}$;

17) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}}$;
18) $f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}}$;

19) $f(x)=\dfrac{3^x-2^x}{6^x}$;
20) $f(x)=\dfrac{2^x+6^x}{12^x}$;

21) $f(x)=\dfrac{3^{x+1}+2^{x-1}}{6^x}$;
22) $f(x)=\dfrac{2^{x+3}-6^{x+1}}{12^x}$;

23) $f(x)=\dfrac{3x^2+7\cos^2 x}{x^2\cos^2 x}$;
24) $f(x)=\dfrac{5x^3-2x\sin^2 x}{x^3\sin^2 x}$;

25) $f(x)=2\operatorname{tg}^2 4x$;
26) $f(x)=3\operatorname{ctg}^2 5x$;

27) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}$;
28) $f(x)=\dfrac{7+3\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}$;

29) $f(x)=\cos^2 x-2\sin 3x\cos 3x-\sin^2 x$;

30) $f(x)=\sin x\cos x\cos 2x$;

31) $f(x)=(\cos x+\sqrt{3}\sin x)^2$;
32) $f(x)=(\sqrt{3}\cos x+\sin x)^{-2}$;

33) $f(x)=\cos 5x\cos 2x$;
34) $f(x)=\sin 7x\sin 3x$;

35) $f(x)=\sin 7x\cos 2x$;
36) $f(x)=\cos 9x\sin 3x$;

37) $f(x)=\sin^2 3x$;
38) $f(x)=\sin^4 6x$.

**Ответы из-за их громоздкости не приводятся.**

**V. Подведение итогов уроков**

# Определенный интеграл

## Уроки 46–47. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла

***Цель***: рассмотреть типичные задачи, связанные с определенным интегралом, и его понятие.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Изучение нового материала**

**Типичные задачи**

**Задача 1.** Площадь криволинейной трапеции.

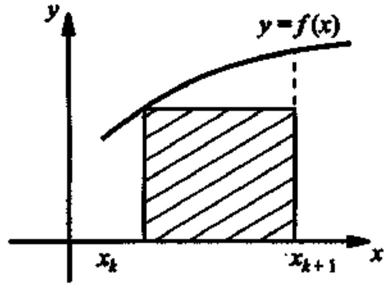
В курсе геометрии были получены формулы для вычисления площадей **простейших фигур** (треугольники и некоторые многоугольники) **и объемов тел** (призмы, пирамиды, цилиндры, конусы, шары). В то же время круг таких задач намного разнообразнее, и необходимо рассмотреть общий подход к подобным задачам.

Сначала рассмотрим понятие криволинейной трапеции. Пусть на отрезке $[a; b]$ оси абсцисс задана непрерывная функция $f(x)$, не меняющая на нем знака. **Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют криволинейной трапецией.**

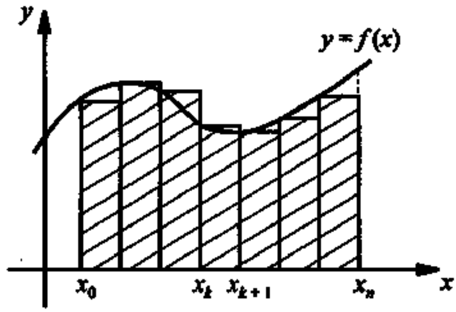

Было бы заманчиво научиться вычислять площади криволинейных трапеций в случае произвольных функций $f(x)$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на $n$ равных частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Построим прямоугольники со сторонами $x_{k+1} - x_k$ и $f(x_k)$.

Площадь такого прямоугольника равна




$f(x_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)=f(x_k)\cdot\Delta x_k$ (где $\Delta x_k$ – длина отрезка $[x_k; x_{k+1}]$, т. е. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$). Если такую процедуру проделать для всех значений $x$ ($x = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$), то площадь криволинейной трапеции $S$ можно приближенно оценить площадью ступенчатой фигуры.

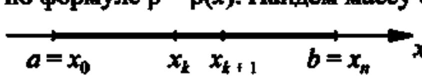



$S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$. При этом $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \ldots =$ $= \Delta x_{n-1} = \dfrac{b-a}{n}$ (хотя такое условие необязательно).

Итак, $S \approx S_n$, и это приближенное равенство тем точнее, чем больше $n$, т. к. на маленьком по длине отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ функция $f(x)$ меняется очень незначительно. Будем считать, что площадь криволинейной трапеции $S$ равна пределу последовательности $(S_n)$, т. е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

**Задача 2. Масса неоднородного стержня.**

Дан прямолинейный неоднородный стержень, концы которого имеют координаты $x = a$ и $x = b$. Плотность стержня в точке $x$ может быть вычислена по формуле $\rho = \rho(x)$. Найдем массу стержня.



Из курса физики известно, что масса $\Delta m$ стержня длиной $\Delta x$ с линейной плотностью $\rho$ вычисляется по формуле $\Delta m = \rho\Delta x$. Для решения данной задачи используем алгоритм задачи 1.

1) Разобьем отрезок $[a; b]$ на $n$ равных частей.

2) Рассмотрим частичный отрезок $[x_k; x_{k+1}]$ и будем считать, что плотность во всех точках этого отрезка постоянна и равна $\rho(x_k)$.

3) Найдем приближенное значение массы этого отрезка $m_k \approx \rho(x_k)\cdot\Delta x_k$.

4) Найдем приближенное значение массы $m$ всего стержня $m \approx S_n$, где $S_n = m_0 + m_1 + \ldots + m_{n-1} = \rho(x_0)\Delta x_0 + \rho(x_1)\Delta x_1 + \ldots + \rho(x_k)\Delta x_k$.

5) Точное значение массы стержня равно пределу последовательности $(S_n)$, т. е. $m = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

**Задача 3.** Перемещение точки.

По прямой движется точка, скорость которой в зависимости от времени вычисляется по формуле $v = v(t)$. Найдем перемещение точки за промежуток времени $[a; b]$.

Напомним, что при равномерном движении с постоянной скоростью $v$ перемещение $S$ вычисляется по формуле $S = vt$. Для решения нашей задачи используем уже рассмотренные идеи.

1) Разделим промежуток времени $[a; b]$ на $n$ равных частей.

2) Рассмотрим промежуток времени $[t_k; t_{k+1}]$ и будем считать, что за этот промежуток времени скорость тела была постоянной и равнялась $v(t_k)$.

3) Найдем приближенное значение перемещения $S_k$ точки за промежуток времени $[t_k; t_{k+1}]$. Это значение равно $S_k = v(t_k\Delta t_k)$.

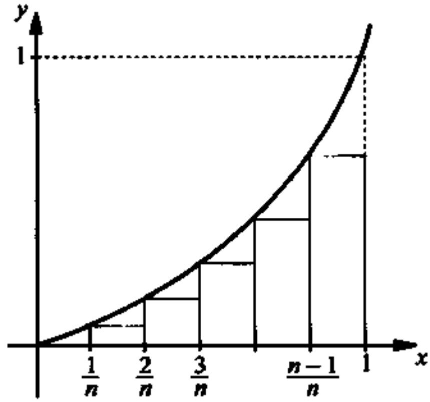
4) Найдем приближенное значение перемещения $S \approx S_n$, где $S_n = S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1} = v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}$.

5) Перемещение равно пределу последовательности $(S_n)$, т. е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Решение трех рассмотренных и (многих) других задач приводит к **одной и той же математической модели**. Такая модель должна быть изучена и приспособлена к решению реальных задач. Пока эта модель достаточно сложна, что видно из следующего примера.

***Пример 1***

Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, параболой $y = x^2$ и прямой $x = 1$.




Построим график функции $y = x^2$. Разобьем отрезок интегрирования $[0; 1]$ на $n$ равных частей. Будем аппроксимировать криволинейную трапецию объединением прямоугольников, построенных под такой трапецией. На каждом промежутке $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ строим прямоугольник высотой $f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{(k-1)^2}{n^2}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$. Площадь такого прямоугольника равна $\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{(k-1)^2}{n^3}$. Сумма площадей всех подобных прямоугольников составляет $S_n=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-2)^2}{n^3}+\frac{(n-1)^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2)$.

Теперь нужно найти сумму квадратов натуральных чисел $1, 2, \ldots, n-2, n-1$. Для этого воспользуемся хорошо известной в математике формулой $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Тогда получаем: $1^2+2^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ и $S_n=\frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1)=$ $=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$. Очевидно, что при $n \to \infty$ величина $\frac{1}{n}\to 0$, и тогда $S_n \to \frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$. Итак, получили: $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{3}$, т. е. площадь данной криволинейной трапеции равна $\frac{1}{3}$.

**Понятие определенного интеграла**

При рассмотрении трех типичных задач для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ была использована следующая математическая модель.

1) Отрезок $[a; b]$ разбивался на $n$ равных частей.

2) Составлялась сумма $S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + ... + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ (эту сумму называют интегральной суммой).

3) Вычислялся $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Доказывается, что такой предел существует. Его называют **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читается: интеграл от $a$ до $b$ эф от икс дэ икса). **Числа $a$ и $b$** называются **пределами интегрирования**: $a$ – нижним пределом, $b$ – верхним. **Знак** $\int$ называют **знаком интегрирования**. Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, переменная $x$ – **переменной интегрирования.**

Вернемся к трем рассмотренным задачам. Тогда площадь $S$ криволинейной трапеции (задача 1) можно записать в виде $S = \int\limits_a^b f(x)dx$. В этом состоит **геометрический смысл** определенного интеграла.

Массу $m$ прямолинейного стержня с плотностью $\rho(x)$ (задача 2) можно записать в виде $m = \int\limits_a^b \rho(x)dx$. В этом состоит **физический смысл** определенного интеграла.

Перемещение $S$ точки, движущейся по прямой со скоростью $v(t)$ (задача 3) можно записать в виде $S = \int\limits_a^b v(t)dt$. В этом также заключается **физический смысл** определенного интеграла.

Учитывая широту применения интегрирования, понятию определенного интеграла можно придавать самый различный геометрический, физический, технический и т.д. смысл.

**Формула Ньютона-Лейбница**

Пока введенное понятие определенного интеграла мало что дает – появился новый символ. Необходимо научиться вычислять такие интегралы. Оказывается, определенный интеграл связан с первообразной.

**Теорема.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Такую формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница**.

На практике вместо записи $F(b)-F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее иногда называют двойной подстановкой). Тогда формулу Ньютона – Лейбница можно записать в виде $\int\limits_a^b f(x) = F(x)\Big|_a^b$.

При вычислении определенного интеграла находят первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, вычисляют ее значение для верхнего $F(b)$ и нижнего $F(a)$ пределов интегрирования и находят их разность $F(b) - F(a)$.

***Пример 2***

Вычислим $\int\limits_0^1 x^2dx$.

Первообразная для функции $f(x) = x^2$ есть функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Тогда $\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$. Сравните эти вычисления с вычислениями примера 1.

***Пример 3***

Вычислим $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$.

Первообразная для функции $f(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ (формула понижения степени) есть функция $F(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$. Тогда $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx =$

$$=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin\pi}{4}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{\sin 0}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

***Пример 4***

Вычислим $\int\limits_1^e \frac{1}{x}dx$.

Первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ есть функция $F(x) = \ln|x|$.

Тогда $\int\limits_1^e \frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1.$

Давайте теперь уточним терминологию. Будем придерживаться терминов, принятых в курсе математического анализа, изучаемого в вузах. Исходя из структуры формулы Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, первообразную функцию $F(x)$ называют **неопределенным интегралом** и обозначают символом $\int f(x)dx$, т. е. $F(x) = \int f(x)dx$. Такой термин связан с тем, что для функции $f(x)$ существует бесконечно много первообразных, т. е. первообразная однозначно не определена. Соответственно, число $\int_a^b f(x)dx$ по аналогии называют **определенным интегралом**, т. к. это вполне конкретное число. Заметим, что по определению первообразной (неопределенного интеграла) **справедливо равенство** $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

***Пример 5***

Вычислим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + \cos x)dx$.

Сначала найдем неопределенный интеграл $\int (x^2 + \cos x)dx = \frac{x^3}{3} + \sin x$, затем определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + \cos x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 +$

$$+\sin\frac{\pi}{2} - \left(\frac{0^3}{3} + \sin 0\right)^0 = \frac{\pi^3}{24} + 1.$$

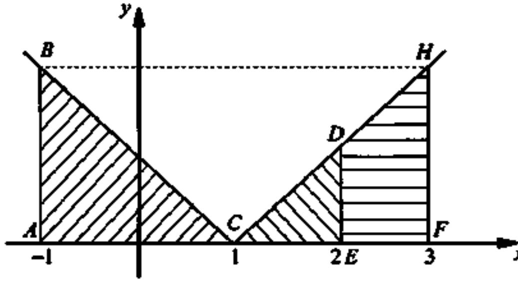
Очень часто при вычислении определенных интегралов полезно использовать их **геометрический** смысл – **площадь** соответствующей **криволинейной трапеции.**

***Пример 6***

Используя геометрический смысл интеграла, вычислим:

а) $\int_{-1}^{2} |x-1|dx$; б) $\int_{2}^{3} |x-1|dx$.

Построим график подынтегральной функции $f(x) = |x - 1|$.




а) Видно, что значение данного интеграла равно площади многоугольника $ABCDE$, состоящего из двух прямоугольных равнобедренных треугольников: $ABC$ ($AB = AC = 2$) и $CDE$ ($CE = ED = 1$). Тогда $\int_{-1}^{2}|x-1|\,dx = \frac{1}{2}AB\cdot AC + \frac{1}{2}CE\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5.$

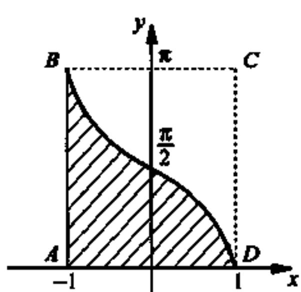
б) Значение данного интеграла равно площади трапеции $EDHF$ с основаниями $ED = 1$ и $HF = 2$ и высотой $EF = 1$. Поэтому $\int_{2}^{3}|x-1|\,dx =$

$= \frac{ED + HF}{2}\cdot EF = \frac{1+2}{2}\cdot 1 = 1{,}5.$

***Пример 7***

Используя геометрический смысл интеграла, вычислим $\int_{-1}^{1}\arccos x\,dx.$

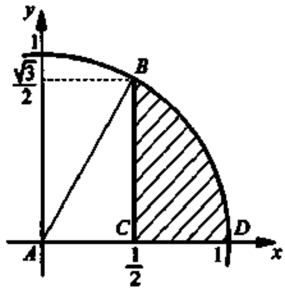
Построим график подынтегральной функции $f(x) = \arccos x$. Также построим прямоугольник $ABCD$ и измерениями $AD = 2$ и $AB = \pi$ и площадью $S = AD\cdot AB = 2\pi$. Видно, что площадь криволинейной трапеции $ABD$ составляет ровно половину площади прямоугольника $ABCD$. Поэтому $\int_{-1}^{1}\arccos x\,dx = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$



***Пример 8***

Используя геометрический смысл интеграла, вычислим:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$; б) $\int\limits_{0,5}^1 \sqrt{1-x^2}dx$.




Построим график подынтегральной функции $y=\sqrt{1-x^2}$. Очевидно, что $y \geq 0$. Возведем обе части равенства в квадрат: $y^2 = 1 - x^2$ или $x^2 + y^2 = 1$. Получили уравнение окружности с центром в начале координат и радиуса 1. Поэтому с учетом условия $y \geq 0$ графиком данной функции является верхняя полуокружность.

а) Значение данного интеграла равно площади четверти круга радиуса 1. Поэтому $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$.

б) Значение этого интеграла равно площади криволинейной трапеции *BCD*. Эта площадь равна разности площади сектора *ABD* (с углом $\frac{\pi}{3}$): $S_{ABD} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ – и площади прямоугольного треугольника *ABC*: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Поэтому значение данного интеграла $\int\limits_{0,5}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Заметим, что в примерах 7 и 8 были найдены соответствующие определенные интегралы, исходя из геометрического смысла. В то же время нахождение аналогичных неопределенных интегралов представляет достаточно серьезную задачу. Кроме того, эти интегралы и выглядят сложно, например: $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ и $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$.

Таким образом, геометрический смысл определенного интеграла во многих задачах очень полезен при его вычислении.

**III. Контрольные вопросы**

1. Понятие криволинейной трапеции.
2. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
3. Понятие определенного интеграла.
4. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
5. Формула Ньютона – Лейбница.

**IV. Задание на уроках**

§ 49, № 1 (а, б); 2 (в, г); 4 (а, б); 5 (в, г); 6 (а, г); 7 (в, г); 8 (а, б); 9 (в, г); 10 (а).

**V. Задание на дом**

§ 49, № 1 (в, г); 2 (а, б); 4 (в, г); 5 (а, б); 6 (б, в); 7 (а, б); 8 (в, г); 9 (а, б); 10 (б).

**VI. Подведение итогов уроков**

## Уроки 48–49. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

***Цель***: отработать навыки вычисления площадей фигур.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Задача о площади криволинейной трапеции.
2. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_1^2 (3-2x)^2\,dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi} (1+\sin^2 x)dx$.

**Вариант 2**

1. Задача о перемещении точки.

2. Вычислите определенный интеграл:

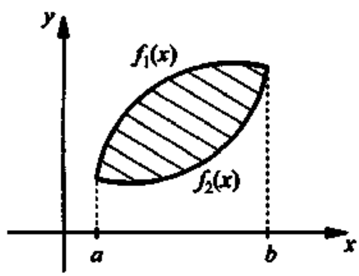
а) $\int\limits_2^3 (5-2x)^2\,dx$;

б) $\int\limits_0^\pi (2-\cos^2 x)dx$.

**III. Изучение нового материала**

Так как понятие определенного интеграла в первую очередь связано с вычислением площади криволинейной трапеции, то остановимся подробнее на **нахождении площадей плоских фигур**. Условно можно выделить несколько характерных типов таких задач.

1. **Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при условии $f_1(x) \geq f_2(x)$.**



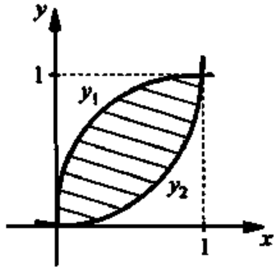

Пусть графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пересекаются в точках $x = a$ и $x = b$ и на отрезке $[a; b]$ выполнено неравенство $f_1(x) \geq f_2(x)$. Тогда площадь заштрихованной фигуры, ограниченной графиками данных функций, равна $S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.

***Пример 1***

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1 = \sqrt{x}$ и $y_2 = x^2$.

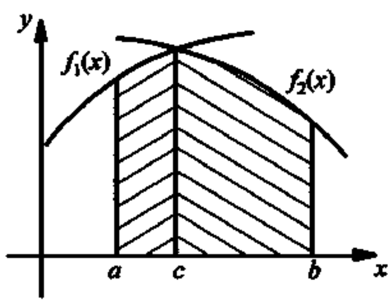
Построим графики данных функций $y_1 = \sqrt{x}$ и $y_2 = x^2$ и найдем точки пересечения этих графиков. Получаем уравнение: $\sqrt{x} = x^2$, или $x = x^4$ или $0 = x(x^3 - 1)$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. На промежутке $[0; 1]$ выполнено неравенство $y_1 \geq y_2$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $S = \int\limits_0^1 (y_1 - y_2)dx = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int\limits_2^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right)dx =$

$$= \left.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \left.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\right|_0^1 = \left(\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot 0^3\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$




**2. Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$.**

Пусть графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пересекаются в точке $c \in [a; b]$. Тогда верхняя граница криволинейной трапеции представляет собой две различные линии $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Поэтому площадь заштрихованной фигуры равна $S = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$.

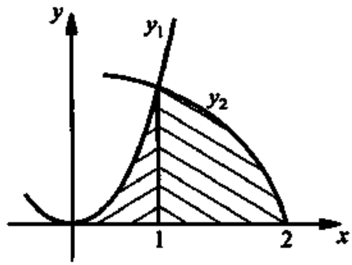



***Пример 2***

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1 = x^2$, $y_2 = \sqrt{2-x}$, $y = 0$ и расположенной в первой четверти.

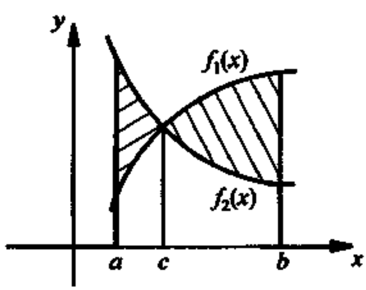
Построим графики функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = \sqrt{2-x}$ и найдем точку пересечения. Получаем уравнение: $x^2 = \sqrt{2-x}$, или $x^4 = 2 - x$, или $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 2) = 0$. Очевидно, что такое уравнение при $x \geq 0$ имеет только один корень $x = 1$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $S = \int_0^1 y_1 dx + \int_0^1 y_2 dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)^{\frac{1}{2}} dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 -$

$$-\left.\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} - \frac{2^0}{3}(2-2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$




3. **Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ различной величины на отрезке $[a; b]$.**

Фактически этот тип задач – сочетание двух предыдущих разновидностей. Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. Пусть графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пересекаются в точке $c \in [a; b]$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $S = \int\limits_a^c (f_2(x) - f_1(x))dx + \int\limits_c^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.




***Пример 3***

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y_1 = x$, $y_2 = \sqrt{2-x}$, $x = 0$, $x = 2$.

Нарисуем заданную фигуру и найдем точку пересечения графиков функций $y_1$ и $y_2$. Получаем уравнение: $x = \sqrt{2-x}$ или $x^2 + x - 2 = 0$. На промежутке [0; 2] это уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

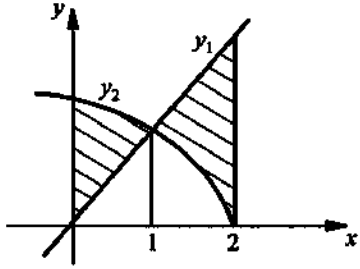
Найдем площадь заштрихованной фигуры: $S = \int\limits_0^1 (y_2 - y_1)dx +$

$$+\int\limits_1^2 (y_1 - y_2)dx = \int\limits_0^1 \left( (2-x)^{\frac{1}{2}} - x \right) dx + \int\limits_1^2 \left( x - (2-x)^{\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \left( -\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 + \left( \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_1^2 = \left( -\frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1^2}{2} \right) -$$

$$-\left(-\frac{2}{3}(2-0)^{\frac{3}{2}}-\frac{0^2}{2}\right)+\left(\frac{2^2}{2}+\frac{2}{3}(2-2)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1^2}{2}+\frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}+2-\frac{5}{6}=\frac{4\sqrt{2}+1}{3}.$$




**4. Прочие типы задач**

К этой разновидности отнесем задачи с несколько **нестандартными условиями**. Несмотря на это, подобные задачи решаются **теми же способами**. Может быть, понадобится более широкое привлечение дополнительных сведений.

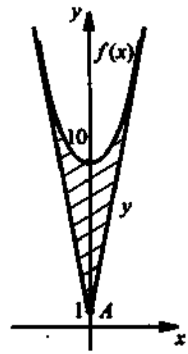
***Пример 4***

Найдем площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 + 10$ и касательными к этому графику, проведенными из точки $A(0; 1)$.

Построим заданную фигуру. Очевидно, что такая фигура симметрична относительно оси ординат. Поэтому достаточно найти сначала площадь половины этой фигуры. Прежде всего получим уравнение касательной. Пусть касание происходит в точке $x_0$. Найдем производную $f'(x) = 2x$ и значения функции и производной в точке $x_0$ и получим: $f'(x_0) = 2x_0$ и $f(x_0)=x_0^2+10$. Запишем уравнение касательной: $y=2x_0(x-x_0)+x_0^2+10$ или $y=2x_0x-x_0^2+10$. Так как касательная проходит через точку $A(0; 1)$, то получаем уравнение $1=-x_0^2+10$, откуда $x_0 = \pm 3$. Тогда уравнение касательных $y = \pm 6x + 1$. Найдем площадь заданной фигуры: $S=2\int_0^3 (f(x)-y)dx=$

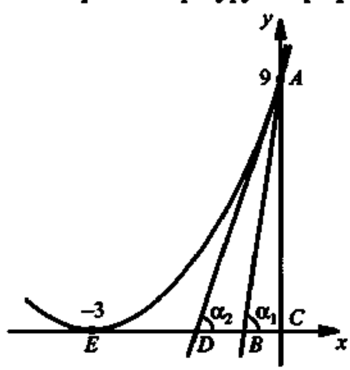
$$=2\int_0^3 (x^2+10-(6x-1))dx=2\int_0^3 (x^2-6x+9)dx=2\int_0^3 (x-3)^2dx=\frac{2}{3}(x-3)^3\Big|_0^3=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 0^3-\frac{2}{3}\cdot(-3)^3=18.$$




***Пример 5***

Фигура ограничена графиком функции $f(x) = (x + 3)^2$ и прямыми $x = 0$ и $y = 0$. Под какими углами к оси абсцисс надо провести две прямые через точку $A(0; 9)$, чтобы они разбили фигуру на три равновеликие части?

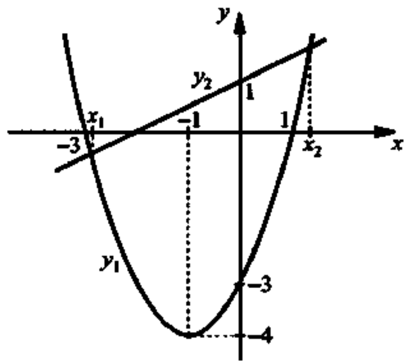



Сначала найдем площадь криволинейной трапеции $ACE$ и получим: $\int\limits_{-3}^{0}(x+3)^2 dx = \frac{(x+3)^3}{3}\Big|_{-3}^{0} = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$. Значит, каждая равновеликая часть фигуры будет иметь площадь 3. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot BC = 3$, откуда $BC = \frac{2}{3}$. Найдем: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$ и $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{27}{2}$.

Площадь $S_{ADC} = 2 \cdot 3 = 6$, поэтому $6 = \frac{1}{2} AC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot DC$, откуда $DC = \frac{4}{3}$. Теперь найдем: $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{AC}{DC} = \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4}$ и $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{27}{4}$.

***Пример 6***

Найдем наименьшее значение площади фигуры, ограниченной параболой $y_1 = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y_2 = ax + 1$. При каком значении параметра $a$ оно достигается?




Пусть графики данных функций пересекаются в точках $x_1$ и $x_2$ ($x_1 < x_2$). При всех $x \in [x_1;\, x_2]$ выполнено неравенство $y_1 \le y_2$. Тогда площадь заданной фигуры $S = \int\limits_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} (ax + 1 - x^2 - 2x + 3)dx =$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} (-x^2 + (a-2)x + 4)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{(a-2)x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

Точки пересечения $x_1$ и $x_2$ являются корнями уравнения $x^2 + 2x - 3 = ax + 1$ или $x^2 + (2-a)x - 4 = 0$ и равны $x_{1,2} = \dfrac{a - 2 \pm \sqrt{(a-2)^2 + 16}}{2}$. Понятно, что подставить такие пределы интегрирования в выражение для площади $S$ нереально. Поэтому воспользуемся формулами Виета: $x_1 + x_2 = a - 2$ и $x_1 x_2 = -4$. Найдем необходимые для вычисления комбинации корней: $x_2 - x_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(a-2)^2 + 16}$ и $x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - - x_1x_2 = (a-2)^2 + 4$.

Теперь преобразуем выражение для площади $S$ к более удобному виду: $S = -\dfrac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \dfrac{a-2}{2}(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1) =$

$$= (x_2 - x_1)\left(-\frac{1}{3}(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \frac{a-2}{2}(x_2 + x_1) + 4\right) =$$

$$=\sqrt{(a-2)^2+16}\cdot\left(-\frac{(a-2)^2+4}{3}+\frac{(a-2)^2}{2}+4\right)=$$

$=\sqrt{(a-2)^2+16}\cdot\frac{(a-2)^2+16}{6}=\frac{1}{6}((a-2)^2+16)^{\frac{3}{2}}$. Очевидно, что наименьшее значение площадь $S$ принимает при $a = 2$ и оно равно $S(2)=\frac{1}{6}\cdot16^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}(2^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\cdot2^6=\frac{2^5}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$.

Заметим, что применение определенных интегралов намного разнообразнее. В математике они могут быть использованы для вычисления объемов тел (пирамида, конус и т. д.), в том числе и объемов тел вращения; длин дуг кривых; площадей поверхностей тел вращения и т. д. В физике определенные интегралы используются для вычисления работы переменной силы, центра масс, энергии тела и т. д.

**IV. Задание на уроках**

§ 49, № 11 (б); 14 (а, б); 17 (б); 19 (а, б); 23 (в, г); 25 (а); 26 (в, г); 27 (а); 28 (б); 29 (а); 31 (а); 32 (в, г); 33 (а); 34 (б).

**V. Задание на дом**

§ 49, № 11 (г); 14 (в, г); 17 (а); 19 (в, г); 23 (а, б); 25 (б); 26 (а, б); 27 (б); 28 (а); 29 (б); 31 (б); 32 (а, б); 33 (б); 34 (а).

**VI. Творческие задания**

1. При каких значениях параметра $a$ выполнено условие:

а) $\int_3^a (x-5)dx=6$;

б) $\int_1^a \sqrt{3x+1}dx=\frac{61}{36}$;

в) $\int_3^a (x-5)dx<6$;

г) $\int_0^a (2-4x+3x^2)dx\le a$;

д) $\int_1^2 (a^2+(4-4a)x+4x^3)dx\le12$.

*Ответы*: а) 1 и 9; б) $\frac{7}{4}$; в) (1; 9); г) $(-\infty; 0]\cup\{1\}$; д) 3.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\begin{cases}2\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2}\le x\le0,\\ -x+2 & \text{при } 0<x\le2\end{cases}$ и $y=0$;

б) $y=\begin{cases} x+2 \text{ при } -2\le x\le 0, \\ 2\cos x \text{ при } 0<x\le -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ и $y=0$.

*Ответы*: а, б) 4.

3. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством:

а) $|y|+\dfrac{1}{2}\le\sqrt{1-|x|}$;

б) $|x^2+y^2-2|\le 2(x+y)$;

в) $|y|+2|x|\le x^2+1$;

г) $x^2+y^2\le 2(|x|+|y|)$.

*Ответы*: а) $\dfrac{5}{6}$; б) $2\pi+4$; в) $\dfrac{4}{3}$; г) $4\pi+8$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2+x+1$, касательной к ней, проведенной в точке $A(1;3)$, и прямой $x=-1$.

*Ответ*: $\dfrac{7}{6}$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке $A(3;5)$ и осью ординат.

*Ответ*: 9.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{2x+1}$ и прямой, проходящей через точки $A(2;2)$ и $B(4;3)$.

*Ответ*: $\dfrac{2}{3}$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{2-x}$ и прямой, проходящей через точки $A(1;1)$ и $B(-5;3)$.

*Ответ*: $\dfrac{1}{6}$.

8. Вычислите интеграл, используя его геометрический смысл:

а) $\int\limits_{-2}^{1}\big||x|-1\big|dx$; б) $\int\limits_{-1}^{3}\big||x|-1\big|dx$;

в) $\int\limits_{-3}^{3}(3-\sqrt{9-x^2})dx$; г) $\int\limits_{-2}^{2}(3+\sqrt{4-x^2})dx$.

*Ответы*: а) $\dfrac{3}{2}$; б) 3; в) $18-4{,}5\pi$; г) $12+2\pi$.

**VII. Подведение итогов уроков**

# Уроки 50–51. Контрольная работа по теме «Первообразная и интеграл»

***Цель***: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Варианты контрольной работы

**Вариант 1**

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$;

б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x^3+3x^2}{x+3} dx$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=4-x^2$; $y=0$;

б) $y=3\cos 2x$, $y=0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

3. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=(3x-2)^3-$ $-2\cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$.

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $v(t)=t^2-3t+2$. Напишите формулы зависимости ее ускорения $a$ и координаты $x$ от времени $t$, если в начальный момент времени ($t=0$) координата $x=-5$.

**Вариант 2**

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$;

б) $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^3-2x^2}{x-2} dx$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=9-x^2$; $y=0$;

б) $y=4\sin 3x,\ \ y=0,\ \ 0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$.

3. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=(5x-3)^2+$ $+3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $v(t)=-t^2+4t+3$. Напишите формулы зависимости ее ускорения $a$ и координаты $x$ от времени $t$, если в начальный момент времени ($t=0$) координата $x=-2$.

**Вариант 3**

1. Вычислите интеграл:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right)dx$;

б) $\displaystyle\int_1^4\frac{x^2+x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sin^2 x\cos x,\ y=0,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$;

б) $y=x^2,\ y=5x-4$.

3. Найдите все первообразные функции $f_1(x)=x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x)=x^2+1$.

4. Скорость прямолинейно движущегося тела задана формулой $v(t)=5\sin\left(2t-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Напишите формулы зависимости его ускорения $a$ и координаты $x$ от времени $t$, если при $t=\dfrac{\pi}{2}$ координата $x=\dfrac{9}{4}$. В этот момент времени найдите $a$ и $v$.

**Вариант 4**

1. Вычислите интеграл:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx$;

б) $\displaystyle\int_1^4\frac{2x^2+3x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\cos^2 x\sin x,\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=\dfrac{\pi}{2}$;

б) $y=x^2, y=3x-2$.

3. Найдите все первообразные функции $f_1(x)=-x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x)=x^2-3$.

4. Скорость прямолинейно движущегося тела задана формулой $v(t)=4\cos\left(3t-\dfrac{\pi}{6}\right)$. Напишите формулы зависимости его ускорения $a$ и координаты $x$ от времени $t$, если при $t=\dfrac{\pi}{3}$ координата $x=\dfrac{5}{3}$. В этот момент времени найдите $a$ и $v$.

**Вариант 5**

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_0^2(\sqrt[3]{1+13x}+2x)dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x\cos x dx$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\begin{cases}1-|x| \text{ при } -1\le x\le\dfrac{1}{2},\\ \cos\dfrac{2\pi}{3}x \text{ при } \dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{3}{4},\end{cases}\quad y=0$;

б) $y=\sin^4 x,\ y=0,\ 0\le x\le\pi$.

3. Для функции $f(x)=(x^2+5x+6)^{-1}$ найдите общий вид первообразных.

4. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(1;\ 2)$, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой точке в три раза больше квадрата абсциссы этой точки.

**Вариант 6**

1. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_0^2(\sqrt{1+4x}-4x)dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\sin x dx$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \begin{cases} 2-|x| & \text{при } -2 \le x < 1, \\ 2\sin\dfrac{\pi x}{6} & \text{при } 1 \le x \le 6, \end{cases}$ $y = 0$;

б) $y = \cos^4 x$, $y = 0$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

3. Для функции $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^{-1}$ найдите общий вид первообразных.

4. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $A(2; 5)$, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой точке в два раза больше абсциссы этой точки.

## Урок 52. Итоги контрольной работы

***Цели***: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

### Ход урока

**I. Сообщение темы и целей урока**

**II. Итоги контрольной работы**

**III. Ответы и решения**

***Ответы***

**Вариант 1**

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

2. $2\dfrac{1}{3}$.

3. $10\dfrac{2}{3}$.

4. 1,5.

5. $F(x) = \dfrac{1}{12}(3x-2)^4 - \dfrac{2}{5}\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{3}\right) + c$.

6. $a = 2t - 3$, $x = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 2t - 5$.

**Вариант 2**

1. $\frac{1}{4}$.

2. $12\frac{1}{3}$.

3. 36.

4. $2\frac{2}{3}$.

5. $F(x)=\frac{1}{15}(5x-3)^3-\frac{3}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+c.$

6. $a=-2t+4,\ x=-\frac{1}{3}t^3+2t^2+3t-2.$

**Вариант 3**

1. $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

2. $24\frac{17}{30}$.

3. $\frac{1}{3}$.

4. $4\frac{5}{6}$.

5. $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ и $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{3}$ (учесть, что в точке касания $F(x) = f_2(x)$ и $f_1(x)=f'_2(x)$).

6. $a=10\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right), x=-\frac{5}{2}\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)+1, a\left(\frac{\pi}{2}\right)=-5, v\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$

**Вариант 4**

1. $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

2. $51\frac{29}{30}$.

3. $\frac{1}{3}$.

4. $\frac{1}{6}$.

5. $F(x)=-\frac{1}{3}x^3-3$ и $F(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$ (учесть, что в точке касания $F(x)=f_2(x)$ и $f_1(x)=f'_2(x)$).

6. $a=-12\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)$, $x=\frac{4}{3}\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+1$, $a\left(\frac{\pi}{3}\right)=-6$, $v\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}$.

***Решения***

**Вариант 5**

1. Используем правило интегрирования функций $f(kx+m)$ и получим: $\int_0^2(\sqrt[3]{1+13x}+2x)dx=\left(\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{4}(1+13x)^{\frac{4}{3}}+x^2\right)\Big|_0^2=\left(\frac{3}{52}(1+13x)^{\frac{4}{3}}+x^2\right)\Big|_0^2=$

$=\left(\frac{3}{52}\cdot 81+4\right)-\frac{3}{52}=8\frac{8}{13}$.

*Ответ*: $8\frac{8}{13}$.

2. Разложим подынтегральную функцию в сумму функций: $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2x\cos x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin 3x+\sin x)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 3x}{3}+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 0}{3}+\cos 0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}=\frac{8-3\sqrt{3}}{12}$.

*Ответ*: $\frac{8-3\sqrt{3}}{12}$.

3. Раскроем знак модуля, построим график подынтегральной функции и вычислим площадь полученной фигуры.


Имеем: $S=\int_{-1}^{0}(1+x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\cos\frac{2\pi}{3}xdx=\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+$

$$+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}x\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}=-\left(-1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{2\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{2\pi}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{7}{8}+\frac{3(2-\sqrt{3})}{4\pi}.$$

*Ответ*: $\frac{7}{8}+\frac{3(2-\sqrt{3})}{4\pi}$.

**4. Используем формулу понижения степени и преобразуем подынтегральную функцию:** $\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=$ $=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$. **Площадь искомой фигуры** $S=\int\limits_0^{\pi}\sin^4 x dx=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx=$

$$=\left(\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi.$$

*Ответ*: $\frac{3}{8}\pi$.

5. В функции $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$ разложим знаменатель на множители и запишем ее в виде: $f(x)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$. Теперь найдем общий вид первообразных: $F(x)=\ln|x+2|-$ $-\ln|x+3|+c=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+c$.

*Ответ*: $F(x)=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+c$.

6. Пусть дана функция $F(x)$. Тогда тангенс угла наклона касательной по условию задачи $\operatorname{tg}\alpha=F'(x)=3x^2$ в каждой точке $x$. Таким образом, надо найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x)=3x^2$. Получаем: $F(x)=x^3+c$. Так как график этой первообразной проходит через точку $A(1;\ 2)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной. Имеем равенство $2=1^3+c$, откуда постоянная $c=1$. Таким образом, уравнение заданной кривой $F(x)=x^3+1$.

*Ответ*: $F(x)=x^3+1$.

**Вариант 6**

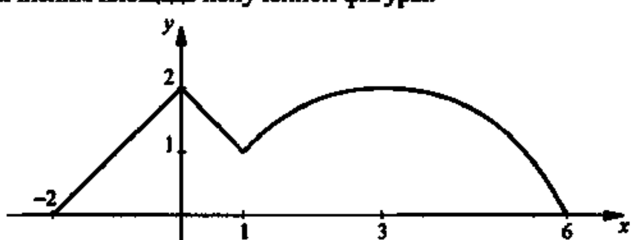
1. Используем правило интегрирования функций $f(kx+m)$ и получим: $\int\limits_0^2(\sqrt{1+4x}-4x)dx=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}-2x^2\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{1}{6}(1+4x)^{\frac{3}{2}}-2x^2\right)\Bigg|_0^2=$
$=\left(\frac{1}{6}\cdot 27-8\right)-\frac{1}{6}=-\frac{11}{3}=-3\frac{2}{3}$.

*Ответ*: $-3\frac{2}{3}$.

2. Разложим подынтегральную функцию в сумму функций: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin 3x-\sin x)\,dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 3x}{3}-\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=$
$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3}-\cos\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 0}{3}-\cos 0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{3}=\frac{3\sqrt{3}-4}{12}$.

*Ответ*: $\frac{3\sqrt{3}-4}{12}$.

3. Раскроем знак модуля, построим график подынтегральной функции и вычислим площадь полученной фигуры.




Имеем: $S=\int\limits_{-2}^{0}(2+x)dx+\int\limits_0^1(2-x)dx+\int\limits_1^6\sin\frac{\pi x}{6}dx=\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1-$
$-2\cdot\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Bigg|_1^6=(4-2)+\left(2-\frac{1}{2}\right)-\frac{12}{\pi}\left(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{2}-\frac{12}{\pi}\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$
$=\frac{7}{2}+\frac{6(2+\sqrt{3})}{\pi}$.

*Ответ*: $\frac{7}{2}+\frac{6(2+\sqrt{3})}{\pi}$.

4. Используем формулу понижения степени и преобразуем подынтегральную функцию: $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) =$ $= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$ Площадь искомой фигуры $S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx =$

$$= \left(\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\pi.$$

*Ответ*: $\frac{3}{8}\pi$.

5. В функции $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ разложим знаменатель на множители и запишем ее в виде: $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)} =$ $= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$. Теперь найдем общий вид первообразных: $F(x) = \ln|x-3| - \ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c.$

*Ответ*: $F(x) = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$.

6. Пусть дана функция $F(x)$. Тогда тангенс угла наклона касательной по условию задачи $\operatorname{tg}\alpha = F'(x) = 2x$ в каждой точке $x$. Таким образом, надо найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 2x$. Получаем: $F(x) = x^2 + c$. Так как график этой первообразной проходит через точку $A(2;\ 5)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению первообразной. Имеем равенство $5 = 2^2 + c$, откуда постоянная $c = 1$. Таким образом, уравнение заданной кривой $F(x) = x^2 + 1$.

*Ответ*: $F(x) = x^2 + 1$.

# Уроки 53–54. Зачетная работа по теме «Первообразная и интеграл»

***Цель***: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Варианты зачетной работы

**Вариант 1**

**А**

1. Докажите, что функция $F(x)=3+4\sin 2x$ является первообразной для функции $f(x)=8\cos 2x$ при $x\in R$.

2. Для функции $f(x)=\sqrt{5x-1}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(2;\ 4)$. Постройте график этой функции.

3. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=2(3x+1)^5$;

б) $f(x)=3\cos 5x-\dfrac{4}{\sin^2 2x}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3+2x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

5. Найдите площадь лунки, ограниченной синусоидами $y=3\sin x$ и $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.

6. Точка движется по прямой со скоростью $v(t)=4t+\sin\pi t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от $t_1=1$ до $t_2=5$.

**В**

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y=8\cos x$, $x=0$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$.

8. Найдите неопределенные интегралы (первообразные):

а) $\int\sin^2 3x\cos 5x\,dx$;

б) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}}$.

9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=x^3-3x$ и касательной к этому графику, проведенной в точке $a=-1$.

**С**

10. Найдите $\int \frac{5x+1}{x^2+x-2}dx.$

11. Из геометрических соображений вычислите интеграл $\int\limits_{-2}^{2}(5+\sqrt{4-x^2})dx.$

12. Из точки (0; $c$) проведены касательные к параболе $f(x) = 1 - x^2$. При каком значении $c$ площадь фигуры, ограниченной этими касательными и параболой, равна 18?

**Вариант 2**

**А**

1. Докажите, что функция $F(x)=7+5\cos 3x$ является первообразной для функции $f(x)=-15\sin 3x$ при $x\in R$.

2. Для функции $f(x)=\sqrt{7x-3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(1; 2)$. Постройте график этой функции.

3. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=3(4x+5)^6$;

б) $f(x)=2\sin 3x-\frac{6}{\cos^2 5x}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3+4x$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.

5. Найдите площадь лунки, ограниченной косинусоидами $y = 4\cos x$ и $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

6. Точка движется по прямой со скоростью $v(t)=6t+2\sin \pi t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от $t_1 = 3$ до $t_2 = 5$.

**В**

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{\sin^2 x}$, $y=8\sin x, \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}.$

8. Найдите неопределенные интегралы (первообразные):

а) $\int\cos^2 2x\sin 7x\,dx$;

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}}.$

9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+3$ и касательной к этому графику, проведенной в точке $a=-1$.

**C**

10. Найдите $\int\frac{5x}{x^2-x-6}dx$.

11. Из геометрических соображений вычислите интеграл $\int\limits_{-3}^{3}(6-\sqrt{9-x^2})dx$.

12. Из точки (0; $c$) проведены касательные к параболе $f(x)=3-x^2$. При каком значении $c$ площадь фигуры, ограниченной этими касательными и параболой, равна 144?

**III. Ответы и решения**

**Вариант 1**

***Ответы***

1. Доказано.

2. $F(x)=\frac{2}{15}(5x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}$.

3. а) $F(x)=\frac{1}{9}(3x+1)^6+c$;

б) $F(x)=\frac{3}{5}\sin 5x+2\operatorname{ctg}2x+c$.

4. $6\frac{3}{4}$.

5. 4.

6. 48.

7. $3\sqrt{3}$.

8. а) $\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{44}\sin 11x-\frac{1}{4}\sin x+c$;

б) $\frac{2}{9}\left[(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]+c$.

9. $6\frac{3}{4}$.

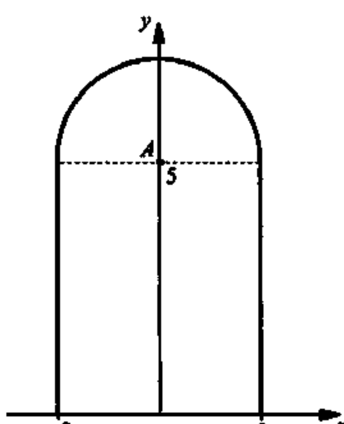
***Решения***

10. Знаменатель подынтегральной функции $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$ раз-

ложим на множители и запишем ее в виде: $f(x)=\dfrac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$. Попытаемся представить функцию $f(x)$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x-1$ и $x+2$ и числителями $a$ и $b$, т. е. $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$. Сложим эти дроби: $f(x)=\dfrac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=$ $=\dfrac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+(2a-b)}{(x-1)(x+2)}$. Имеем равенство: $\dfrac{5x+1}{x^2+x-2}=$ $=\dfrac{(a+b)x+(2a-b)}{(x-1)(x+2)}$, которое выполняется при условиях $\begin{cases}5=a+b,\\1=2a-b.\end{cases}$ Решение этой системы уравнений $a=2$ и $b=3$. Тогда функция $f(x)$ имеет вид: $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+2}$. Получаем: $\int f(x)dx=2\int\dfrac{1}{x-1}dx+3\int\dfrac{1}{x+2}dx=$ $=2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+c.$

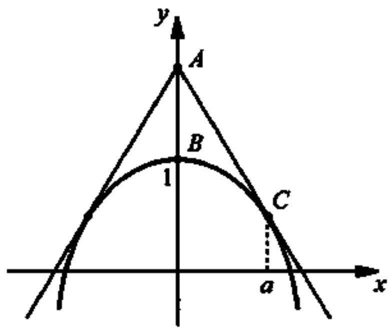
*Ответ*: $2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+c$.

11. Построим график подынтегральной функции $y=5+\sqrt{4-x^2}$. Получаем: $y-5=\sqrt{4-x^2}$ (где $y-5\geq 0$, т. е. $y\geq 5$) или $x^2+(y-5)^2=2^2$. Это уравнение верхней полуокружности с центром в точке $A(0;\ 5)$ и радиуса 2. Теперь легко вычислить площадь построенной фигуры, состоящей из прямоугольника (с размерами 4 и 5) и полукруга радиуса 2. Получаем: $S=4\cdot 5+\dfrac{1}{2}\pi\cdot 2^2=20+2\pi$.




*Ответ*: $20+2\pi$.

12. Очевидно, что парабола $f(x) = 1 - x^2$ и касательные к ней симметричны относительно оси ординат. Поэтому достаточно вычислить площадь криволинейной трапеции $ABC$, которая по условию будет равна 9. Предположим, что касание происходит в точке $a$. Получим уравнение касательной $AC$.




Найдем $f'(x) = -2x$. Тогда уравнение касательной имеет вид: $y = -2a(x-a)+(1-a^2) = -2ax+a^2+1$. Так как касательная проходит через точку $A(0;\ c)$, то $c = a^2 + 1$. Необходимо найти точку касания $a$. Для этого запишем площадь фигуры $ABC$: $S = \int\limits_0^a \left[(-2ax+a^2+1)-(1-x^2)\right]dx =$

$= \int\limits_0^a (x-a)^2\,dx = \left.\dfrac{(x-a)^3}{3}\right|_0^a = \dfrac{a^3}{3}$. Получаем уравнение $\dfrac{a^3}{3} = 9$, откуда $a = 3$. После этого находим $c = a^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10$.

*Ответ*: 10.

**Вариант 2**

***Ответы***

1. Доказано.

2. $F(x) = \dfrac{2}{21}(7x-3)^{\frac{3}{2}} + \dfrac{26}{21}$.

3. а) $F(x) = \dfrac{3}{28}(4x+5)^7 + c$;

б) $F(x) = -\dfrac{2}{3}\cos 3x - \dfrac{6}{5}\operatorname{tg} 5x + c$.

4. 96.

5. 6.

6. 48.

7. $3\sqrt{3}$.

8. а) $-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{44}\cos 11x-\frac{1}{12}\cos 3x+c$;

б) $\frac{2}{9}\left[(x-2)^{\frac{3}{2}}-(x-5)^{\frac{3}{2}}\right]+c$.

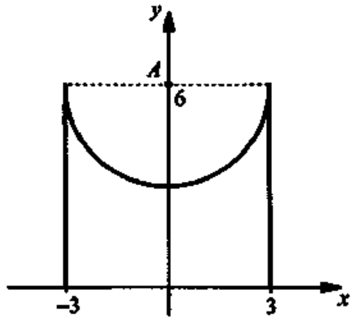
9. $2\frac{1}{4}$.

***Решения***

10. Знаменатель подынтегральной функции $f(x)=\frac{5x}{x^2-x-6}$ разложим на множители и запишем ее в виде $f(x)=\frac{5x}{(x-3)(x+2)}$. Попытаемся представить функцию $f(x)$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x-3$ и $x+2$ и числителями $a$ и $b$, т. е. $f(x)=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}$. Сложим эти дроби: $f(x)=\frac{a(x+2)+b(x-3)}{(x-3)(x+2)}=$ $=\frac{ax+2a+bx-3b}{(x-3)(x+2)}=\frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}$. Имеем равенство: $\frac{5x}{x^2-x-6}=$ $=\frac{(a+b)x+(2a-3b)}{(x-3)(x+2)}$, которое выполняется при условиях $\begin{cases}5=a+b,\\0=2a-3b.\end{cases}$ Решение этой системы уравнений $a=3$ и $b=2$. Тогда функция $f(x)$ имеет вид: $f(x)=\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+2}$. Получаем: $\int f(x)dx=$ $=3\int\frac{1}{x-3}dx+2\int\frac{1}{x+2}dx=3\ln|x-3|+2\ln|x+2|+c$.

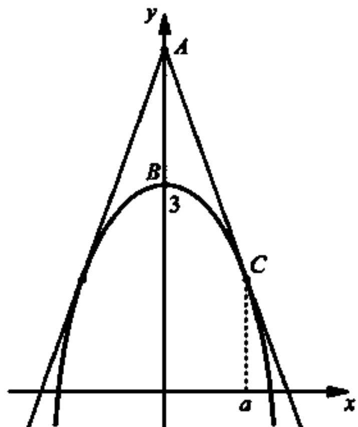
*Ответ*: $3\ln|x-3|+2\ln|x+2|+c$.

11. Построим график подынтегральной функции $y=6-\sqrt{9-x^2}$. Получаем: $\sqrt{9-x^2}=6-y$ (где $6-y\geq 0$, т. е. $y\leq 6$) или $x^2+(y-6)^2=3^2$. Это уравнение нижней полуокружности с центром в точке $A(0;\,6)$ и радиуса 3. Теперь легко вычислить площадь построенной фигуры, состоящей из квадрата (со стороной 6) без полукруга радиуса 3. Получаем: $S=6^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 3^2=36-4,5\pi$.




*Ответ*: 36 – 4,5π.

12. Очевидно, что парабола $f(x) = 3 - x^2$ и касательные к ней симметричны относительно оси ординат. Поэтому достаточно вычислить площадь криволинейной трапеции $ABC$, которая по условию будет равна 72. Предположим, что касание происходит в точке $a$. Получим уравнение касательной $AC$.




Найдем $f'(x) = -2x$. Тогда уравнение касательной имеет вид: $y = -2a(x-a)+(3-a^2) = -2ax+a^2+3$. Так как касательная проходит через точку $A(0; c)$, то $c = a^2 + 3$. Необходимо найти точку касания $a$. Для этого запишем площадь фигуры $ABC$: $S = \int_0^a \left[(-2ax+a^2+3)-(3-x^2)\right]dx =$

$= \int_0^a (x-a)^2 dx = \left.\frac{(x-a)^3}{3}\right|_0^a = \frac{a^3}{3}$. Получаем уравнение $\frac{a^3}{3} = 72$, откуда $a = 6$. После этого находим $c = a^2 + 3 = 6^2 + 3 = 39$.

*Ответ*: 39.

# II полугодие

# Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

Прежде всего заметим, что изучение этого материала в средней школе **нецелесообразно и вредно** (на наш взгляд) по следующим причинам:

1. Данный материал **значительно отличается** по подходу, логике, методике от классического курса алгебры и математического анализа и **является искусственным включением** в курс математики.

2. Эти разделы математики имеют **ограниченные области применения,** и их **роль** слишком **преувеличена** (скорее это дань очередной моде).

3. Изучение такого материала идет **за счет других разделов математики** (например, на изучение этой темы отводится 11 часов, а на изучение значительно более важной темы «Первообразная и интеграл» – 9 часов, за которые научить интегрировать невозможно). При этом рассмотреть даже в общих чертах изучаемый материал также **невозможно.**

4. Учащийся средней школы (с учетом падения уровня образования) **не понимает** этой темы. Многие разумные педагоги просто **не изучают** такие разделы (сэкономленное время тратится **на более подробное рассмотрение** других тем курса).

## Уроки 55–56. Статистическая обработка данных

***Цель***: рассмотреть основные понятия статистики.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Изучение нового материала**

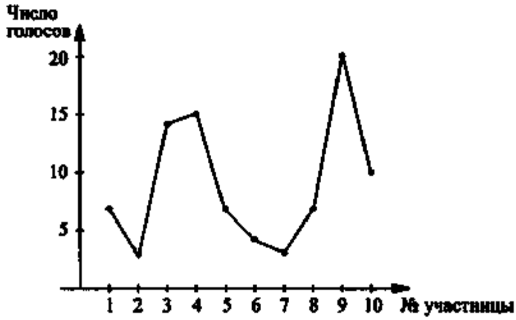
Многие из нас участвуют в переписи населения, выборах, опросах и т. д. При этом появляется определенная информация. Задача статистики – **отражение** этой **информации** и ее **обработка**. Для этого необходимо ввести некоторые статистические **характеристики**. Рассмотрим следующий пример.

***Пример 1***

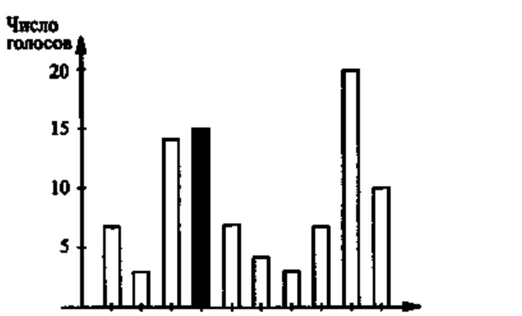
В финал конкурса «Мисс факультета» вышли 10 студенток, за которых болели и голосовали 90 студентов. В таблице приведены результаты голосования за участниц с номерами 1–10. Прежде всего возникает вопрос о наглядном отражении результатов голосования. Из курса алгебры вы знаете, что графическая информация нагляднее табличной. Поэтому применяют три вида графического отражения информации – диаграммы.

| № участницы | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число голосов | 7 | 3 | 14 | 15 | 7 | 4 | 3 | 7 | 20 | 10 |

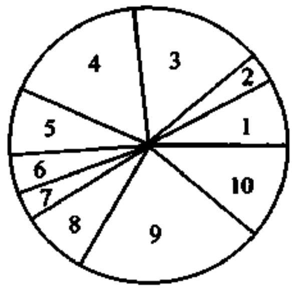
Первый вид диаграммы – **линейная диаграмма** (или **многоугольник распределения**) строится как обычный график. По оси абсцисс откладываются номера участниц, по оси ординат – число голосов, отданных за данную участницу, т. е. точки (1; 7), (2; 3), (3;14) и т. д. Для наглядности отмеченные точки соединены отрезками.




Второй вид диаграммы – **столбчатая диаграмма** (или **гистограмма распределения**) строится следующим образом. В окрестности каждой отмеченной точки по оси абсцисс строят прямоугольник, высота которого равна соответствующей ординате. При этом обычно ширину прямоугольников делают одинаковой. Достаточно часто прямоугольники изображаются таким образом, что два соседних имеют общую сторону. При этом прямоугольники могут штриховаться (см. учебник).



Третья диаграмма – **круговая** (или **камамбер** (по названию французского сыра)) – представляет собой круг, разделенный на 10 секторов с различными центральными углами. Так как всего было подано 90 голосов, то каждому голосу соответствует 360° : 90 = 4°. Далее легко пересчитать углы секторов. Например, для первой участницы строим сектор с углом 4° · 7 = 28°. Каждый сектор маркируется номером соответствующей участницы.




На практике применяют все три вида диаграмм. Итак, на конкретном примере были рассмотрены **основные этапы** простейшей **статистической обработки** данных:

1. Систематизация, упорядочивание и группировка.
2. Составление таблицы распределения данных.
3. Построение диаграммы распределения данных (любого вида).
4. Паспорт данных измерения (основные характеристики информации).

Обсудим некоторые **характеристики** рассматриваемого примера.

**Объем измерения** – количество источников информации (т. е. число опрошенных или число голосов). В данном случае 90.

**Размах измерения** – разница между наибольшим и наименьшим значениями результатов измерения. В данном случае 20 – 3 = 17, т. к. наибольшее число поданных голосов – 20, наименьшее – 3.

**Мода измерения** – наиболее часто встречающийся результат. В данном случае 9, т. к. за участницу № 9 было подано 20 голосов (наибольшее количество).

**Среднее** (или **среднее арифметическое**) – частное от деления суммы всех результатов измерения на объем измерения. Обычно его вычисляют после составления таблицы распределения. В данном случае получают: $\frac{1\cdot7+2\cdot3+3\cdot14+4\cdot15+5\cdot7+6\cdot4+7\cdot3+8\cdot7+9\cdot20+10\cdot10}{90}=$

$$=\frac{7+6+42+60+35+24+21+56+180+100}{90}=\frac{531}{90}\approx5{,}9.$$

Обычно результатами измерений являются некоторые числа. Каждое число, встретившееся в конкретном измерении, называют **вариантой измерения**. В конкретном измерении его варианты могут быть никак не связаны (например, билетики с результатами голосования). Однако обычно результаты обрабатываются. Если записать все варианты измерения в некотором порядке (например, по времени поступления голосов в жюри), то получится **ряд данных измерения**. Обычно упорядочивание происходит определенным образом. Запишем полученные варианты в порядке их возрастания (точнее, неубывания). Получим **сгруппированный ряд данных**: $\underbrace{1,1,...,1}_{7}$; $\underbrace{2,2,...,2}_{3}$; $\underbrace{3,3,...,3}_{14}$; $\underbrace{4,4,...,4}_{15}$; $\underbrace{5,5,...,5}_{7}$; $\underbrace{6,6,...,6}_{4}$; $\underbrace{7,7,...,7}_{3}$; $\underbrace{8,8,...,8}_{7}$; $\underbrace{9,9,...,9}_{20}$; $\underbrace{10,10,...,10}_{10}$.

Среднюю варианту в сгруппированном ряде данных в случае нечетного количества чисел или среднее арифметическое двух стоящих посередине вариант в случае четного количества чисел называют **медианой измерения**. В нашем случае средних вариант две, это варианты № 45 и 46. Каждая из них равна 5, значит, и медиана равна $\frac{5+5}{2}=5$.

В нашем примере ответ 1 встретился 7 раз (за участницу 1 проголосовали 7 человек). Поэтому говорят, что **абсолютная частота (или кратность)** варианты 1 равна семи. Поэтому (в другой терминологии) ранее приведенная таблица имеет вид:

| Варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Кратность | 7 | 3 | 14 | 15 | 7 | 4 | 3 | 7 | 20 | 10 | 90 |

Таким образом, получаем **таблицу распределения** данных измерения. Графа «Сумма» добавляется для контроля: число в этой графе обязательно равняется объему измерения.

Заметим, что при вычислении среднего арифметического в неявном виде уже использовалось понятие кратности варианты.

Введем еще понятие **частоты** данной **варианты** – частное от деления кратности варианты на объем измерения. Например, для варианты 1 находим частоту $\frac{7}{90}\approx 0,078$. Частоту варианты можно выразить **в процентах**. Тогда получим: $\frac{7}{90}\cdot 100=\frac{70}{9}\approx 7,8$ %.

Рассмотренные параметры: среднее арифметическое, мода и медиана – характеризуют некоторую варианту. Их называют **мерами центральной тенденции** (или **статистическими характеристиками среднего**). Разумеется, все эти характеристики важны.

***Пример 2***

Вернемся еще раз к примеру 1. **Среднее арифметическое** голосов, поданных за финалистку (с учетом их кратности), равно 5,9. Но, разумеется, подать 5,9 голоса невозможно. Поэтому **медиана** измерений дает среднюю характеристику (середину), упорядоченного ряда чисел. **Мода** измерений позволяет выбрать победительницу конкурса, т. е. финалистку, набравшую наибольшее количество голосов.

Однако природа не любит крайностей (которые характеризуются **размахом** измерений), а придерживается средних величин. Например, животные одного вида в среднем имеют одинаковый рост. Слоны ростом ниже 1 м и выше 5 м встречаются крайне редко. Поэтому полезно ввести характеристики, отвечающие за разброс данных вокруг их среднего значения.

**Дисперсией** $D$ данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений $(x_i - M)^2$ от среднего арифметического $M$ этих данных. **Для вычисления дисперсии** $D$ данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ надо найти:

1) среднее значение $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;

2) отклонения данных от $M$, т. е. $x_1 - M, x_2 - M, \ldots, x_n - M$;

3) квадраты этих отклонений, т. е. $(x_1 - M)^2, (x_2 - M)^2, \ldots, (x_n - M)^2$;

4) среднее значение всех квадратов отклонений.

В результате получим дисперсию:

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}.$$

Вводится также понятие **среднего квадратичного отклонения** $\sigma = \sqrt{D}$.

Чем меньше дисперсия $D$ или среднее квадратичное отклонение $\sigma$, тем **ближе** данные измерения к своему среднему значению. Заметим, что вычисление этих характеристик достаточно трудоемкое занятие.

***Пример 3***

Для отбора почетного караула измерили рост (в см) двух групп солдат по пять человек и получили результаты – группа А: 178, 182, 180, 183, 177; группа Б: 183, 186, 180, 182, 184. Для каждой группы определим дисперсию $D$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma$ и найдем группу, более однородную по росту.

Для группы А среднее арифметическое $M = \dfrac{178+182+180+183+177}{5} =$

$= \dfrac{900}{5} = 180$. Для удобства составим таблицу.

| Солдат | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Рост | 178 | 182 | 180 | 183 | 177 |
| Отклонение | –2 | 2 | 0 | 3 | –3 |
| Квадрат отклонения | 4 | 4 | 0 | 9 | 9 |

Найдем дисперсию $D=\frac{4+4+0+9+9}{5}=\frac{26}{5}=5,2$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma=\sqrt[5]{5,2}\approx 2,3$.

Аналогичные вычисления проделаем для группы Б. Среднее арифметическое $M=\frac{183+186+180+182+184}{5}=\frac{915}{5}=183$.

| Солдат | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Рост | 183 | 186 | 180 | 182 | 184 |
| Отклонение | 0 | –3 | 3 | –1 | 1 |
| Квадрат отклонения | 0 | 9 | 9 | 1 | 1 |

Найдем дисперсию $D=\frac{0+9+9+1+1}{5}=\frac{20}{5}=4$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma=\sqrt{4}=2$.

Сравнивая полученные результаты, определим, что более однородной по росту является группа Б и ее целесообразно назначить в караул.

**III. Контрольные вопросы**

1. Основные задачи статистики.
2. Виды диаграмм распределения и их построение.
3. Объем измерения.
4. Понятие размаха измерения.
5. Мода измерения.
6. Среднее арифметическое.
7. Понятие медианы измерения.
8. Кратность и частота варранты.
9. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение данных.

**IV. Задание на уроках**

§ 50, № 1, 3, 5, 7, 9, 11.

**V. Задание на дом**

§ 50, № 2, 4, 6, 8, 10.

**VI. Подведение итогов уроков**

# Уроки 57–58. Простейшие вероятностные задачи

*Цель*: рассмотреть простейшие понятия теории вероятностей.

## Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Определение среднего арифметического.

2. Приведен рост (в см) пяти человек: 163, 183, 172, 180, 172. Найдите среднее, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

**Вариант 2**

1. Определение моды измерений.

2. Приведен рост (в см) пяти человек: 187, 162, 171, 162, 183. Найдите среднее, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

**III. Изучение нового материала**

В классической математике работают с реальной моделью ситуации (например, встреча двух пешеходов), которая **однозначно описывается** с помощью математического аппарата. В жизни мы постоянно сталкиваемся с тем, что некоторое событие может произойти, а может и не произойти (например, не оговоренная заранее встреча двух друзей в кафе). Такие непредсказуемые события называют **случайными. Теория вероятностей** изучает различные модели случайных событий, их свойства и характеристики. Разумеется, эта теория не может однозначно предсказать, какое событие в реальности произойдет, но может оценить, какое событие наиболее вероятно. Естественно, как и во всей остальной математике, выбираемая модель **идеализирована** (например, смеси веществ считаются идеально перемешанными, изменение скорости тела происходит мгновенно и т. д.). Поэтому, как мы наблюдаем в жизни, почти небывалое событие происходит, а ожидаемое – нет.

Теперь разберемся с **основными понятиями** теории вероятности. При этом будем считать, что случайные события **равновероятны** (или **равновозможны**), – идеализированная модель.

**Классическое определение вероятности.** Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Для решения задач используют **алгоритм нахождения вероятности случайного события**. Необходимо определить:

1) число $N$ всех равновозможных исходов данного испытания;

2) количество $N(A)$ исходов, в которых наступает событие $A$;

3) частное $\frac{N(A)}{N}$ равняется вероятности события $A$, которое обозначают символом $P(A)$, т. е. $P(A)=\frac{N(A)}{N}$.

***Пример 1***

Найдем вероятность того, что при одном бросании игральной кости (кубика) выпадет: а) три очка; б) число очков, кратное трем; в) число очков больше трех; г) число очков, не кратное трем.

Всего имеется $N = 6$ возможных исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Считаем, что эти исходы равновозможны.

а) Только при одном из исходов $N(A) = 1$ происходит интересующее нас событие $A$ – выпадение трех очков. Вероятность этого события $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{1}{6}$.

б) При двух исходах $N(B) = 2$ происходит событие $B$: выпадение числа очков, кратных трем: выпадение или трех, или шести очков. Вероятность такого события: $P(B)=\frac{N(B)}{N}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

в) При трех исходах $N(C) = 3$ происходит событие $C$: выпадение числа очков больше трех: выпадение 4, 5 или 6 очков. Вероятность этого события $P(C)=\frac{N(C)}{N}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

г) Из шести возможных выпавших чисел четыре (1, 2, 4 и 5) не кратны трем, а остальные два (3 и 6) делятся на три. Значит, интересующее нас событие $D$ наступает в четырех случаях, т. е. $N(D) = 4$. Вероятность такого события: $P(D)=\frac{N(D)}{N}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

***Пример 2***

Найдем вероятность того, что при вытаскивании одной карты из колоды (52 карты) эта карта окажется: а) дамой пик; б) дамой любой масти; в) картой пиковой масти; г) картой черной масти.

Всего имеем $N = 52$ возможных исхода. Считаем, что эти исходы равновероятны.

а) Очевидно, что в колоде только одна дама пик. Поэтому только при одном из исходов $N(A) = 1$ происходит интересующее нас событие $A$ – выпадение дамы пик. Вероятность этого события $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{52}$.

б) Также в колоде имеются карты четырех мастей, в том числе четыре дамы. Поэтому при четырех исходах $N(B) = 4$ происходит нужное нам событие $B$ – выпадение любой дамы. Вероятность такого события $P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

в) В колоде имеется по 13 карт каждой масти, в том числе и пиковой. Поэтому число интересующих нас исходов $N(C) = 13$ – выпадение карты пиковой масти. Вероятность этого события $P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

г) В колоде имеются 26 карт черной масти и 26 карт красной масти. Число интересующих нас исходов $N(D) = 26$ – выпадение карты черной масти. Вероятность такого события $P(D) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

При вычислении вероятности часто используют **правило умножения**. Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний $A$ и $B$, необходимо перемножить число всех исходов испытания $A$ и число всех исходов испытания $B$.

***Пример 3***

Найдем вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 5.

Возможно следующее сочетание очков на первой и второй костях: $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$, $4 + 1$ – четыре благоприятных случая ($N(A) = 4$). Всего возможных исходов $N = 6 \cdot 6 = 36$ (по шесть для каждой кости).

Тогда вероятность рассматриваемого события $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Событие, которое происходит всегда, называют **достоверным** событием. Например, событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадет натуральное число очков. **Вероятность** достоверного события **равна** 1. Событие, которое не может произойти, называют **невозможным**. Например, выпадение 9 очков на игральной кости. **Вероятность** невозможного события **равна** 0. Таким образом, вероятность $P(A)$ некоторого события $0 \le P(A) \le 1$.

Заметим, что понятие вероятности позволяет решать практические задачи.

***Пример 4***

Как приближенно посчитать число рыб в озере?

Пусть в озере плавает $x$ рыб. Бросаем сеть и отлавливаем $n$ рыб. Вероятность поймать одну рыбу $P=\frac{n}{x}$. Пометим этих рыб и выпустим в озеро. Через несколько дней в ту же погоду, в том же месте ставим ту же сеть. Предположим, что поймали $m$ рыб, из них $k$ – меченых. Меченая рыба поймалась с вероятностью $P=\frac{k}{m}$. Получаем равенство: $\frac{n}{x}=\frac{k}{m}$, откуда $x=\frac{nm}{k}$. Разумеется, точность такого эксперимента будет невысокой, но для оценки числа рыб в озере вполне допустима.

При решении некоторых задач удобно использовать **свойство вероятностей противоположных событий**. События $A$ и $B$ называют **противоположными**, если всякое наступление события $A$ означает ненаступление события $B$, а ненаступление события $A$ – наступление события $B$. Событие, противоположное событию $A$, обозначают символом $\overline{A}$. Сумма вероятностей противоположных событий **равна 1**, т. е. $P(A)+P(\overline{A})=1$.

***Пример 5***

Пусть бросают игральную кость. Обозначим события: $A$ – выпадения четного числа очков, $B$ – выпадение нечетного числа очков. Очевидно, что $A$ и $B$ – противоположные события, т. е. $B=\overline{A}$. При этом $P(A)+P(\overline{A})=1$.

***Пример 6***

Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, меньше 10?

Общее число равновозможных исходов этого испытания равно 36. Пусть событие $A$ означает, что сумма выпавших на двух кубиках очков меньше 10. Так как благоприятным для события $A$ является большое число исходов, то удобно сначала найти вероятность противоположного ему события $\overline{A}$, которое означает, что сумма выпавших очков больше или равна 10. Благоприятными для события $\overline{A}$ являются: 6 + 4; 6 + 5; 6 + 6; 5 + 6; 4 + 6. Поэтому вероятность $P(\overline{A})=\frac{5}{36}$ и $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{31}{36}$.

Еще раз отметим два основных правила, используемых в теории вероятностей: правило сложения вероятностей и правило умножения вероятностей.

Два события называют **несовместными**, если в одном и том же испытании они не могут произойти одновременно, т. е. наступление одного из них исключает наступление другого.

***Пример 7***

Пусть в мешке находятся 15 шаров: 7 белых, 5 красных и 3 зеленых. Из мешка наугад вынимают один шар. Рассмотрим следующие события: событие $A$ – шар оказался красным; событие $B$ – шар оказался зеленым (очевидно, что события $A$ и $B$ несовместны); событие $C$ – шар оказался не белым (красным или зеленым). Выясним, как вероятность события $C$ связана с вероятностями каждого из событий $A$ и $B$.

Найдем вероятности событий $A$, $B$, $C$. Для каждого испытания (извлечение из мешка одного шара) равновозможными являются 15 исходов. Из них для события $A$ благоприятны 5 исходов, для события $B$ – 3 исхода, для события $C$ – 8 исходов. Находим вероятности этих событий: $P(A)=\frac{5}{15}, P(B)=\frac{3}{15}, P(C)=\frac{8}{15}$. Видно, что $P(C) = P(A)+P(B)$.

Имеем **правило сложения** вероятностей: если событие $C$ означает, что наступает одно из двух несовместных событий $A$ и $B$, то вероятность события $C$ равна сумме вероятностей событий $A$ и $B$.

***Пример 8***

На учениях летчик получил задание «уничтожить» три расположенных рядом склада боеприпасов. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад равна 0,1, во второй – 0,15, в третий – 0,2. Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв остальных складов. Найдем вероятность того, что склады будут уничтожены.

Обозначим события: $A$ – попадание в первый склад, $B$ – попадание во второй склад, $C$ – попадание в третий склад (эти события несовместны), $D$ – уничтожение складов. По правилу сложения вероятностей $P(D)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}1+0{,}15+0{,}2=0{,}45$.

Два события называют **независимыми**, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого события.

***Пример 9***

Пусть в одном мешке находятся 10 шариков, из которых 3 белых, а в другом – 15 шариков, из которых 7 белых. Из каждого мешка наугад вытаскивают по одному шарику. Какова вероятность того, что оба шарика окажутся белыми?

Рассмотрим события: $A$ – из первого мешка вынимают белый шарик; $B$ – из второго мешка вынимают белый шарик (события независимы). Для события $A$ благоприятными являются 3 исхода из 10 и $P(A)=\frac{3}{10}$, для события $B$ – 7 исходов из 15 и $P(B)=\frac{7}{15}$.

Рассмотрим событие $C$, состоящее в совместном появлении событий $A$ и $B$. Общее число равновозможных исходов испытания, в которых событие $C$ наступает или не наступает, равно $10 \cdot 15$. Действительно, каждому из 10 извлечений шарика из первого мешка соответствует 15 возможностей извлечения шарика из второго мешка. Благоприятными для события $C$ являются те исходы, при которых оба вынутых шарика являются белыми. Каждому из трех возможных извлечений белого шарика из первого мешка соответствуют семь возможностей извлечения белого шарика из второго мешка, т. е. число исходов, благоприятных для события $C$, равно $3\cdot 7$. Поэтому получаем: $P(C)=\frac{3\cdot 7}{10\cdot 15}=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{15}$ или $P(C)=P(A)\cdot P(B)$.

Имеем **правило умножения вероятностей**: если событие $C$ означает совместное наступление двух независимых событий $A$ и $B$, то вероятность события $C$ равна произведению вероятностей событий $A$ и $B$, т. е. $P(C)=P(A)\cdot P(B)$.

***Пример 10***

Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на первой кости четного числа очков и на второй – трех очков?

Обозначим события: $A$ – появление на первой кости четного числа очков, $B$ – появление на второй кости трех очков, $C$ – появление на первой кости четного числа очков и на второй кости трех очков (т. е. событие $C$ состоит в совместном появлении событий $A$ и $B$). События $A$ и $B$ независимы, тогда $P(C)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Какие события называют несовместными?
2. Правило сложения вероятностей.
3. Свойство вероятностей противоположных событий.
4. Какие события называют независимыми?
5. Правило умножения вероятностей.

**V. Задание на уроках**

§ 51, № 1, 3, 4, 9, 10, 12.

**VI. Задание на дом**

§ 51, № 2, 5, 6, 7, 8, 11.

**VII. Подведение итогов уроков**

# Уроки 59–60. Сочетания и размещения

***Цель***: рассмотреть основные понятия комбинаторики.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Достоверное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что на игральной кости выпадет четное число очков.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 8.

**Вариант 2**

1. Невозможное событие и его вероятность.

2. Найти вероятность того, что на игральной кости выпадет нечетное число очков.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании двух костей суммарное число очков окажется равным 9.

### III. Изучение нового материала

При рассмотрении простейших вероятностных задач нам приходилось подсчитывать число различных исходов (комбинаций). Для небольшого числа элементов такие вычисления сделать несложно. В большинстве случаев такая задача представляет значительную сложность. **Комбинаторикой** называют область математики, которая изучает вопросы о числе различных комбинаций (удовлетворяющих тем или иным условиям), которые можно составить из данных элементов. Первоначально комбинаторика (и теория вероятностей) возникла в XVI в. в связи с распространением различных азартных игр. В настоящее время комбинаторика используется в теории информации (кодировка и декодировка), линейном программировании (составление расписаний уроков, грузоперевозок) и т. д.

Сначала рассмотрим некоторые задачи комбинаторики.

***Пример 1***

Сколько существует двузначных чисел?

При образовании чисел используются десять цифр: 0, 1, 2, ..., 9. Так как число двузначное, то число десятков может принимать одно из девяти значений: 1, 2, 3, ..., 9. Число единиц принимает те же значения, и еще 0 (10 вариантов).

Если цифра десятков 1, то цифра единиц может быть любой из десяти: 0, 1, 2, ..., 9. Если цифра десятков 2, то цифра единиц вновь может быть любой из десяти: 0, 1, 2, ..., 9, и т. д. Тогда получаем, что возможно $9 \cdot 10 = 90$ вариантов (чисел). Разумеется, их легко выписать: 10, 11, 12, ..., 99.

***Пример 2***

Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Очевидно, что на первом (соответственно, и на последнем) месте может стоять любая цифра (кроме нуля) – 9 вариантов. На втором (соответственно и на предпоследнем) месте может стоять любая цифра – 10 вариантов. На третьем месте (в середине) также может стоять любая цифра – 10 вариантов. Тогда получаем, что возможно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ вариантов (чисел).

Из рассмотренных примеров можно сформулировать **комбинаторное правило умножения**. Пусть имеется $n$ элементов, и надо выбрать из них один за другим $k$ элементов. Если первый элемент можно выбрать $n_1$ способами, после чего второй элемент можно выбрать $n_2$ способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать $n_3$ способами из оставшихся и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все $k$ элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

***Пример 3***

В спортивных соревнованиях участвуют 10 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовые медали, если любая команда может получить только одну медаль?

Начнем распределять медали с наименее ценной. Бронзовую медаль может получить одна из 10 команд (10 вариантов). После этого серебряную медаль получит одна из оставшихся 9 команд (9 вариантов). Наконец, золотую медаль получает одна из оставшихся 8 команд (8 вариантов). Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

***Пример 4***

В 9 классе изучается 10 предметов. Во вторник должны быть проведены 6 различных уроков. Сколькими способами можно составить расписание занятий на вторник?

По аналогии с примером 3 на первом уроке изучается любой из 10 предметов, на втором уроке – любой из оставшихся 9 предметов, на третьем уроке – любой из оставшихся 8 предметов и т. д. Таким образом, расписание можно составить $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$ способами.

**Перестановки**

Введем некоторые необходимые понятия.

**Соединением** из $n$ элементов по $k$ назовем выборку $k$ элементов из $n$ различных элементов ($k \le n$).

***Пример 5***

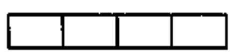
Пусть даны три различных элемента ($n = 3$): $a$, $b$ и $c$. Перечислим соединения из трех элементов по одному ($k = 1$): $a$, $b$, $c$;

соединения из трех элементов по два ($k = 2$): $ab$, $ba$, $ac$, $ca$, $bc$, $cb$;

соединения из трех элементов по три ($k = 3$): $abc$, $acb$, $bac$, $bca$, $cab$, $cba$.

В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов или нет, а также от того, входят ли в соединение все $n$ элементов или только $k$ (при условии $k < n$), различают три вида соединений: **перестановки, размещения, сочетания**. Комбинаторика изучает **число** таких **соединений** (но не сами соединения).

Сначала рассмотрим простейший вид соединений – **перестановки**. Соединения, каждое из которых содержит $n$ различных элементов, взятых в определенном порядке, называются **перестановками** из $n$ элементов. Другими словами, имеется $n$ позиций (мест), которые надо заполнить $n$ различными элементами:



$n$ мест

***Пример 6***

Рассмотрим перестановки из трех элементов: $a$, $b$, $c$.

Необходимо расположить на три позиции три элемента.

Если на первую позицию поставить элемент $a$, то возможны перестановки: $abc$, $acb$.

Если на первую позицию поставить элемент $b$, то возможны перестановки: $bac$, $bca$.

Если на первую позицию поставить элемент $c$, то возможны перестановки: $cab$, $cba$.

Видно, что число перестановок из трех элементов равно 6.

Вообще, **число перестановок** из $n$ элементов обозначают символом $P_n$ (читается: $P$ из $n$). В данном примере $P_3 = 6$.

Выведем формулу **числа** $P_n$ **перестановок** из $n$ элементов. Используем комбинаторное правило умножения. На первую позицию можно поместить любой из $n$ элементов, на вторую позицию – любой из оставшихся $(n-1)$ элементов, на третью позицию – любой из оставшихся $(n-2)$ элементов и т. д. В результате получим: $P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Расположим множители в порядке возрастания. Имеем: $P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)(n-1)n$.

Для произведения первых $n$ натуральных чисел используют символ $n!$ (читается: $n$ факториал), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$. При этом $1! = 1$ (и $0! = 1$). Тогда число всевозможных перестановок из $n$ элементов вычисляется по формуле $\boldsymbol{P_n = n!}$.

***Пример 7***

Вычислим:

а) $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (см. пример 6);

б) $\dfrac{9!}{2!7!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 7!} = \dfrac{7!\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 7!} = \dfrac{8\cdot 9}{2} = 4\cdot 9 = 36$;

в) $\dfrac{5!}{m(m+1)}\cdot\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!\cdot 3!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot (m+1)!}{(m-1)!m(m+1)\cdot 3!} = \dfrac{4\cdot 5\cdot (m+1)!}{(m+1)!} = 4\cdot 5 = 20$

(где $m \in N$).

***Пример 8***

Решим уравнение $\dfrac{n!-(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{6}$ (где $n \in N$).

Упростим левую часть уравнения, пользуясь определением факториала: $\dfrac{n(n-1)!-(n-1)!}{(n-1)!\cdot n(n+1)} = \dfrac{1}{6}$, или $\dfrac{(n-1)!(n-1)}{(n-1)!\cdot n(n+1)} = \dfrac{1}{6}$, или $\dfrac{n-1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{6}$, или $0 = n^2 - 5n + 6$. Корни этого квадратного уравнения $n = 2$ и $n = 3$ действительно являются натуральными числами и решениями данного уравнения.

***Пример 9***

Сколькими способами можно расставить на полке семь различных книг?

Число таких способов равно числу перестановок из семи элементов, т. е. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 = 5040$.

***Пример 10***

Имеются 10 различных книг, три из которых – справочники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все справочники стояли рядом?

Так как справочники должны стоять рядом, то будем рассматривать их как одну книгу. Тогда на полке надо расставить $10 - 3 + 1 = 8$ книг. Это можно сделать $P_8$ способами. Для каждой из полученных комбинаций можно сделать $P_3$ перестановок справочников. Поэтому число способов расположения книг на полке равно произведению: $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 40\,320 \cdot 6 = 241\,920$.

***Пример 11***

Сколько различных пятизначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 1, 3, 6, 9?

Из пяти цифр можно получить $P_5$ перестановок. Из них надо исключить те перестановки, которые начинаются с нуля (т. к. первая цифра в числе не может быть нулем). Число таких перестановок равно $P_4$. Тогда получаем: $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4! \cdot 5 - 4! = 4! \cdot (5-1) = 4! \cdot 4 = 24 \cdot 4 = 96$ пятизначных чисел.

**Размещения**

Соединения, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком, каждое из которых содержит $k$ элементов, взятых из $n$ различных элементов, называют **размещениями** из $n$ элементов по $k$ ($k < n$). Другими словами, из $n$ элементов выбирают $k$ элементов и размещают их на $k$ позиций. Число размещений из $n$ элементов по $k$ обозначают символом $A_n^k$ (читается: $A$ из $n$ по $k$).

***Пример 12***

Рассмотрим три элемента $a$, $b$, $c$ и выделим две позиции (два места). Будем размещать эти элементы на два места, учитывая порядок следования элементов.

Получаем размещения: $ab$, $ba$, $ac$, $ca$, $bc$, $cb$. Число этих размещений $A_3^2 = 6$.

Получим формулу для вычисления **числа размещений** $n$ элементов по $k$ ($k < n$), т. е. $A_n^k$. Опять учтем комбинаторное правило умножения. На первое место можно поставить любой из $n$ элементов, на второе место – любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и т. д. Тогда на $k$-е место можно поставить любой из $n-(k-1) = n-k+1$ оставшихся элементов. Получаем: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Удобнее записать эту формулу в другом виде. Для этого умножим и разделим правую часть равенства на $(n-k)!$ Получаем: $A_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Итак, имеем: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Очевидно, что при $k = n$ размещения можно рассматривать как перестановки и $A_n^n = P_n = n!$ (учтено, что $0! = 1$).

***Пример 13***

Сколько существует трехзначных чисел, в которых цифры различные и нечетные?

Нечетных цифр пять: 1, 3, 5, 7, 9. Их надо разместить на три позиции. Поэтому количество искомых чисел равно числу размещений $A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=3\cdot4\cdot5=60.$

***Пример 14***

Сколько трехзначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Из шести данных цифр можно составить $A_6^3$ чисел, но среди них будут и трехзначные числа, начинающиеся с нуля (чего, естественно, быть не может). Посчитаем количество таких чисел. В них на первом месте стоит нуль. Значит, на оставшиеся две позиции размещают оставшиеся пять цифр. Поэтому таких чисел будет $A_5^2$. Следовательно, искомых чисел можно получить: $A_6^3-A_5^2=\frac{6!}{(6-3)!}-\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{6!}{3!}-\frac{5!}{3!}=$ $=4\cdot5\cdot6-4\cdot5=120-20=100.$

***Пример 15***

Сколько чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Учтем предыдущий пример. Из пяти цифр можно составить $A_5^5$ пятизначных чисел, в том числе и тех, которые начинаются с нуля (их число $A_4^4$). Поэтому истинно пятизначных чисел будет $A_5^5-A_4^4=5!-4!=4\cdot4!=96.$ Из пяти цифр можно составить $A_5^4$ четырехзначных чисел, из них начинаются с нуля $A_4^3$ чисел. Поэтому истинно четырехзначных чисел будет $A_5^4-A_4^3=2\cdot3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4=$ $=120-24=96.$ Аналогично находим количество истинно трехзначных чисел: $A_5^3-A_4^2=3\cdot4\cdot5-3\cdot4=60-12=48,$ истинно двузначных чисел: $A_5^2-A_4^1=4\cdot5-4=16$ – и однозначных чисел – 5. Всего можно составить 96 + 96 + 48 + 16 + 5 = 261 пятизначных, четырехзначных, трехзначных, двузначных и однозначных числа.

***Пример 16***

Вычислим $\frac{A_{12}^4-A_{11}^4}{A_{10}^3}$.

Используем формулу для числа размещений и получим:

$$\frac{A_{12}^4-A_{11}^4}{A_{10}^3}=\left(\frac{12!}{8!}-\frac{11!}{7!}\right):\frac{10!}{7!}=\frac{9\cdot10\cdot11\cdot12-8\cdot9\cdot10\cdot11}{8\cdot9\cdot10}=\frac{9\cdot10\cdot11\cdot(12-8)}{8\cdot9\cdot10}=$$

$$=\frac{11\cdot4}{8}=\frac{11}{2}=5{,}5.$$

***Пример 17***

Найдем натуральное значение $n$, для которого выполнено условие $A_n^3 + 3A_n^2 = \frac{1}{2}P_{n+1}$.

Используем формулы для числа размещений и числа перестановок и запишем условие: $\frac{n!}{(n-3)!} + 3\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{1}{2}(n+1)!$, или $(n-2)(n-1)n +$ $+3(n-1)n = \frac{1}{2}(n+1)!$, или $(n-1)n(n-2+3) = \frac{1}{2}(n+1)!$, или $2(n-1)n(n+1) =$ $= (n+1)!$, или $2 = (n-2)!$. Очевидно, что $n - 2 = 2$ и $n = 4$.

**Сочетания**

Соединения, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, каждое из которых содержит $k$ элементов, выбранных из $n$ различных элементов, называют **сочетаниями** из $n$ элементов по $k$. **Порядок** следования элементов **неважен**. Число сочетаний из $n$ элементов по $k$ обозначают символом $C_n^k$ (читается: $C$ из $n$ по $k$).

***Пример 18***

Рассмотрим три элемента $a$, $b$, $c$ и выделим две позиции (два места). Будем расставлять эти элементы на два места независимо от порядка их следования. Получаем сочетания: $ab$, $ac$, $bc$. Число этих сочетаний $C_3^2 = 3$.

Получим формулу для вычисления числа сочетаний $n$ элементов по $k$ ($k \le n$), т. е. $C_n^k$. Допустим, имеется множество, содержащее $n$ элементов, и из его элементов составлены все возможные сочетания по $k$ элементов. Число таких сочетаний равно $C_n^k$. В каждом таком сочетании можно выполнить $P_k$ перестановок. В результате получим все размещения, которые можно составить из $n$ элементов по $k$ (их число равно $A_n^k$). Получили равенство $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, откуда $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

Используя формулы для $A_n^k$ и $P_k$, имеем: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

***Пример 19***

Сколькими способами можно составить расписание на вторник, если изучаются 10 предметов и должно быть 6 уроков (порядок уроков неважен)?

Используем формулу для числа $C_n^k$ сочетаний из $n$ элементов по $k$ и получим $C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 3\cdot 10 = 210$ способов.

***Пример 20***

Найти число диагоналей $n$-угольника.

Имеем $n$ точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Соединим эти точки попарно всеми возможными способами. Будем иметь $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2}$ отрезков. Из этих отрезков $n$ отрезков являются сторонами многоугольника. Тогда диагоналей будет: $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$. В соответствии с полученной формулой имеем: у треугольника 0 диагоналей, у четырехугольника 2 диагонали, у пятиугольника 5 диагоналей, у шестиугольника 9 диагоналей и т. д.

***Пример 21***

В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого $n$-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

Одна точка пересечения диагоналей возникает за счет двух диагоналей, т. е. четырех вершин. Их можно выбрать $C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} =$ $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. Таким образом, нашли число точек пересечения диагоналей. По этой формуле получаем: у четырехугольника 1 точка пересечения диагоналей, у пятиугольника 5 точек, у шестиугольника 15 точек и т. д.

***Пример 22***

У Кати есть семь разных книг по математике, у Коли девять книг по физике. Сколькими способами они могут обменяться пятью книгами?

Катя может выбрать пять книг из семи $C_7^5 = \frac{7!}{5!2!} = 21$ способом, Коля (независимо от Кати) может выбрать пять книг из девяти $C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ способами. Итого возможных вариантов обмена: $C_7^5 \cdot C_9^5 = 21 \cdot 126 = 2646$.

***Пример 23***

Из двух математиков и десяти физиков надо составить комитет из восьми человек. В комитет должен входить хотя бы один математик. Сколькими способами это можно сделать?

В таком комитете могут быть:

а) 1 математик и 7 физиков;

б) 2 математика и 6 физиков.

Обсудим эти ситуации.

а) Одного математика из двух можно выбрать $C_2^1 = \frac{2!}{1!\cdot 1!} = 2$ способами, 7 физиков из 10 можно выбрать $C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ способами. Всего же можно выбрать этот состав комитета $C_2^1 \cdot C_{10}^7 = 2\cdot 120 = 240$ способами.

б) Двух математиков из двух можно выбрать $C_2^2 = \frac{2!}{2!0!} = 1$ способом, 6 физиков из 10 – $C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$ способами.

Общее число выборов такого комитета: $C_2^1 \cdot C_{10}^7 + C_2^2 \cdot C_{10}^6 = 240 + 210 = 450$ способов.

Так как случаи *а* и *б* происходят независимо (т. е. вместе не могут быть реализованы), то использовалось еще одно правило комбинаторики – **правило сложения**. Если первое действие можно выполнить $n_1$ способами, второе действие – $n_2$ способами, ..., $k$-е действие – $n_k$ способами, то действие, состоящее в том, что **выполняется одно любое из действий**, можно выполнить $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами. На это правило рассмотрим еще пример.

***Пример 24***

Сколько существует делителей числа 210?

Разложим число 210 на простые множители: $210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Число делителей, состоящих из произведения двух простых множителей, равно $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ (числа 6, 10, 14, 15, 21, 35), из произведения трех простых множителей $C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$ (числа 30, 42, 70, 105). Кроме того, есть четыре простых делителя (числа 2, 3, 5, 7), а также само число 210 и 1. Всего получаем 6 + 4 + 4 + 1 + 1 = 16 делителей числа 210.

***Пример 25***

Найдите натуральные значения $n$, удовлетворяющие условию $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^4} = \frac{6}{5}$.

Используем формулу для нахождения числа сочетаний из $n$ элементов по $k$. Получим уравнение: $\frac{(n+1)4!(n-4)!}{3!(n-2)!n!}=\frac{6}{5}$, или $\frac{(n+1)4}{(n-3)(n-2)}=\frac{6}{5}$, или $10(n+1)=3(n^2-5n+6)$, или $0 = 3n^2 - 25n + 8$. Корни этого квадратного уравнения $n=\frac{1}{3}$ (ненатуральное число) и $n = 8$.

Заметим, что до сих пор рассматривались виды соединений с **различными $n$ элементами**. Но некоторых из этих элементов могут быть и одинаковыми. Тогда все приведенные **формулы** для числа перестановок $P_n$, числа размещений $A_n^k$ и числа сочетаний $C_n^k$ **меняются**. Не будем углубляться в рассмотрение соединений с одинаковыми элементами. Но для иллюстрации рассмотрим, например, перестановки с одинаковыми элементами.

Перестановки из $n$ элементов, в каждую из которых входят $n_1$ одинаковых элементов одного типа, $n_2$ одинаковых элементов другого типа, ..., $n_k$ одинаковых элементов $k$-го типа (при этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), называют **перестановками** из $n$ элементов **с повторениями**. Их число определяется по формуле $C_n(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot...\cdot n_k!}$.

***Пример 26***

Сколькими способами можно расположить в ряд две зеленые, четыре красные и шесть желтых лампочек?

Всего имеется $2 + 4 + 6 = 12$ лампочек. Число способов их расположения $C_{12}(2;4;6)=\frac{12!}{2!4!6!}=\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}=13860$.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Соединение из $n$ элементов по $k$.
2. Перечислите три вида соединений.
3. Дайте определение перестановок из $n$ элементов.
4. Понятие факториала ($n!$).
5. Число перестановок $P_n$ из $n$ элементов.
6. Дайте определение размещений.
7. Приведите формулу для вычисления числа размещений.
8. Определение сочетаний из $n$ элементов по $k$.
9. Число $C_n^k$ сочетаний из $n$ элементов по $k$.
10. Перестановки из $n$ элементов с повторениями.
11. Число $C_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ перестановок из $n$ элементов с повторениями.

**V. Задание на уроках**

§ 52, № 1 (а, б); 2 (а, б); 3 (в, г); 4 (а, г); 5 (а, в); 6 (б, г); 8; 10 (а, б); 12 (в, г); 14; 16; 18; 20.

**VI. Задание на дом**

§ 52, № 1 (б, г); 2 (в, г); 3 (а, б); 4 (б, в); 5 (б, г); 6 (а, в); 9; 10 (в, г); 12 (а, б); 15; 17; 19.

**VII. Подведение итогов уроков**

# Урок 61. Формула бинома Ньютона

***Цель***: обсудить формулу бинома Ньютона и ее применение.

## Ход урока

**I. Сообщение темы и цели урока**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 3, 4, 8?

2. Из 24 участников собрания надо выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

3. Миша имеет восемь, а Витя – семь различных конфет. Сколькими способами мальчики могут поменяться пятью конфетами?

**Вариант 2**

1. Сколько различных трехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 4, 5?

2. Из 28 спортсменов надо выбрать капитана команды и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

3. Коля имеет девять, а Лёня – восемь различных конфет. Сколькими способами мальчики могут поменяться шестью конфетами?

**III. Изучение нового материала**

Рассмотрим **возведение в степень** $n$ **двучлена (бинома)** $a + b$ и отметим определенные закономерности. Имеем:

при $n = 0$ $(a + b)^0 = 1$;
при $n = 1$ $(a + b)^1 = a + b$;
при $n = 2$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
при $n = 3$ $(a + b)^3 = a + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
при $n = 4$ $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Прежде всего отметим, что при возведении бинома $a + b$ в степень $n$ получаем **однородный многочлен** также степени $n$. Напомним, что однородным многочленом степени $n$ по переменным $a$ и $b$ называют многочлен, состоящий из одночленов той же степени $n$, т. е. из одночленов вида $a^{n-k}b^k$ (где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$). Например, при возведении во вторую степень $(a + b)^2$ получаем однородный многочлен также второй степени $a^2 + 2ab + b^2$. При этом коэффициенты при одночленах тоже связаны определенными закономерностями.

Докажем, что выполняется формула (**формула бинома Ньютона**):

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n,$$

где $C_n^k$ – число сочетаний из $n$ элементов по $k$, т. е. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

При возведении бинома $a + b$ в степень $n$ надо $n$ раз перемножить этот бином, т. е. $(a + b)(a + b)\ldots(a + b)$. Чтобы при раскрытии скобок получить одночлен вида $a^{n-k}b^k$, нужно из $n$ множителей вида $a + b$ выбрать $k$ множителей (порядок неважен). Тогда получим множитель $b^k$. Это можно сделать $C_n^k$ способами. При этом второй множитель $a^{n\ k}$ получается автоматически. Итак, формула доказана.

Коэффициенты $C_n^k$ также называют **биномиальными**. Они обладают рядом **свойств**, которые обсудим, рассмотрев **треугольник Паскаля** (составленную определенным образом таблицу).

| | | |
|---|---|---|
| $n = 0$ | $C_0^0$ | 1 |
| $n = 1$ | $C_1^0 \quad C_1^1$ | 1 1 |
| $n = 2$ | $C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$ | 1 2 1 |
| $n = 3$ | $C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$ | 1 3 3 1 |
| $n = 4$ | $C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$ | 1 4 6 4 1 |

1) В каждой строке находятся коэффициенты одночленов при возведении в степень $n$. Например, при $n = 3$ имеем коэффициенты 1, 3, 3, 1 одночленов в многочлене $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2) Каждое число равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Например, $C_3^1 = C_2^0 + C_2^1$ (или 3 = 1 + 2) и $C_3^2 = C_2^1 + C_2^2$ (или 3 = 2 + 1). Эта закономерность указана линиями. Другими словами, в общем виде выполняется равенство $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

3) Коэффициенты в строке симметричны относительно середины. Например, при $n = 3$ получили симметричные коэффициенты 1, 3, 3, 1. Иначе, в общем случае справедливо равенство $C_n^k = C_n^{k-1}$.

4) Крайние коэффициенты в каждой строке равны 1, т. к. $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$.

***Пример 1***

Возведем бином $a + b$ в четвертую степень.

1) Учитывая формулу бинома Ньютона, выпишем структуру ответа: $(a+b)^4 = ...a^4 + ...a^3b + ...a^2b^2 + ...ab^3 + ...b^4$.

2) Используя треугольник Паскаля, вместо знаков ... расставим соответствующие биномиальные коэффициенты и окончательно получим: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Аналогично поступают и в случае более громоздких биномов.

***Пример 2***

Возведем бином $2x - 3y^2$ в куб.

Подобно предыдущему примеру, получим: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + {}$ ${}+ 3ab^2 + b^3$. Учтем, что в нашем случае $a = 2x$ и $b = -3y^2$. Тогда имеем: $(2x-3y^2)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-3y^2) + 3\cdot(2x)(-3y^2)^2 + (-3y^2)^3 =$ $= 8x^3 - 36x^2y^2 + 54xy^4 - 27y^6$. Итак, получили: $(2x-3y^2)^3 =$ $= 8x^3 - 36x^2y^2 + 54xy^4 - 27y^6$.

***Пример 3***

Докажем, что сумма коэффициентов в каждой строке треугольника Паскаля равна $2^n$.

Другими словами, надо доказать, что справедливо равенство $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$. Запишем формулу бинома Ньютона: $(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$. Теперь легко сообразить: чтобы в правой части этого равенства получилась сумма биномиальных коэффициентов, достаточно в равенство подставить значения $a = 1$ и $b = 1$. Получаем: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$, что и требовалось доказать.

***Пример 4***

Найдем сумму $S = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + ... + 2C_n^{n-2} + C_n^{n-1}$.

Используя формулу бинома Ньютона, получим равенство: $(x+1)^n =$ $= C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + ... + C_n^{n-2}x^2 + C_n^{n-1}x + C_n^n$. Найдем производную от обеих частей этого равенства: $n(x+1)^{n-1} = C_n^0 nx^{n-1} + C_n^1(n-1)x^{n-2} + C_n^2(n-2)x^{n-3} + ... + C_n^{n-2}\cdot 2x + C_n^{n-1}$. Теперь в это равенство подставим значение $x = 1$. Имеем: $n\cdot 2^{n-1} = C_n^0 \cdot n + C_n^1\cdot(n-1) + C_n^2\cdot(n-2) + ... + C_n^{n-2}\cdot 2 + C_n^{n-1}$. Таким образом, искомая сумма $S = n\cdot 2^{n-1}$.

Рассмотрим более сложные задачи.

***Пример 5***

Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64. Найти слагаемое, не содержащее $x$.

Прежде всего необходимо найти $n$. Так как сумма биномиальных коэффициентов равна $64 = 2^6$, то (с учетом примера 3) получаем равенство $2^{3n} = 2^6$, откуда $n = 2$. Тогда имеем разложение $\left(4x + \frac{1}{4x^2}\right)^6$. Член такого разложения $T_{k+1}$ с номером $k + 1$ равен $T_{k+1} = C_6^k\cdot(4x)^{6-k}\cdot\left(\frac{1}{4x^2}\right)^k = C_6^k\cdot 4^{6-k}\cdot x^{6-k}\cdot 4^{-k}\cdot x^{-2k} = C_6^k\cdot 4^{6-2k}\cdot x^{6-3k}$. Так как этот член не должен зависеть от $x$, то показатель степени при $x$ равен нулю, т. е. $6 - 3k = 0$, откуда $k = 2$. Теперь найдем этот член: $T_3 = C_6^2\cdot 4^2 = \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 4^2 = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot 4^2 = 15\cdot 16 = 240$. Итак, указанным свойством обладает третий член разложения, и он равен 240.

***Пример 6***

При каких значениях $x$ четвертое слагаемое разложения $(5 + 2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

Член такого разложения $T_{k+1}$ с номером $k + 1$ имеет вид $T_{k+1} = C_{16}^k\cdot 5^{16-k}\cdot(2x)^k$. Запишем четвертый член ($k = 3$) $T_4 = C_{16}^3\cdot 5^{15}\cdot(2x)^3$, третий член ($k = 2$) $T_3 = C_{16}^2\cdot 5^{14}\cdot(2x)^2$ и пятый член ($k = 4$) $T_5 = C_{16}^4\cdot 5^1\cdot(2x)^4$. По условию задачи $T_4 > T_3 + T_5$. Получаем неравенство: $C_{10}^3\cdot 5^{13}\cdot(2x)^3 > C_{10}^2\cdot 5^{14}\cdot(2x)^2 + C_{16}^4\cdot 15^{12}\cdot(2x)^4$ или $\frac{16!}{3!13!}\cdot 5^{13}\cdot 2^3 x^3 > \frac{16!}{2!14!}\cdot 5^{14}\cdot 2^2 x^2 + \frac{16!}{4!12!}\cdot 5^{12}\cdot 2^4 x^4$. Умножим обе части этого неравенства на положительное выражение $\frac{14!\cdot 4!}{16!\cdot 5^{12}\cdot 2^2\cdot x^2}$

(очевидно, $x \neq 0$) и после преобразований получим квадратное неравенство $364x^2 - 495x + 150 < 0$. Решение этого неравенства $\frac{15}{28} < x < \frac{10}{13}$.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Формула бинома Ньютона.
2. Биномиальные коэффициенты. Треугольник Паскаля.
3. Основные свойства биномиальных коэффициентов.

**V. Задание на уроке**

§ 53, № 1 (а, г); 2 (в, г); 3 (а, в); 4 (а); 5 (а, в); 6 (б); 7.

**VI. Задание на дом**

§ 53, № 1 (б, в); 2 (а, б); 3 (б, г); 4 (б); 5 (б, г); 6 (а).

**VII. Подведение итогов урока**

## Урок 62. Случайные события и их вероятности (факультативное занятие)

***Цели***: обсудить связь комбинаторики и теории вероятностей; рассмотреть понятие геометрической вероятности.

### Ход урока

**I. Сообщение темы и целей урока**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Решите уравнение $C_n^{n-2} = 21$ (где $n \in N$).

2. В разложении $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ укажите одночлен, содержащий $x^8$.

3. Найдите сумму $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$.

**Вариант 2**

1. Решите уравнение $C_{n+1}^{n-1} = 28$ (где $n \in N$).

2. В разложении $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$ укажите одночлен, содержащий $x^8$.

3. Найдите сумму $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... - (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n$.

**III. Изучение нового материала**

Учитывая, что рассматриваемая тема сложна для изучения в школе, остановимся только на двух аспектах этой темы:

1) связи комбинаторики и теории вероятностей;

2) понятии геометрической вероятности.

Так как методы комбинаторики позволяют посчитать число соединений (т. е. число исходов события), то **комбинаторика** широко используется **в теории вероятностей.**

***Пример 1***

Из колоды в 52 карты случайным образом вытаскивают 4 карты. Какова вероятность того, что среди них: а) нет туза пик; б) есть туз пик?

Мы имеем 52 элемента (карты). Из них выбираем 4 элемента. Это можно сделать $N = C_{52}^4$ способами. Будем считать, что такие выборы равновозможны.

а) Среди всех $N$ исходов посчитаем те, в которых нет пикового туза (событие $A$). Поэтому отложим его в сторону и будем выбирать четыре карты из оставшихся 51 карты. Число таких интересующих нас исходов $N(A) = C_{51}^4$. Тогда нужная вероятность $P(A) = \frac{N(A)}{N} =$

$$= \frac{C_{51}^4}{C_{52}^4} = \frac{51!}{4!\cdot 47!} : \frac{52!}{4!\cdot 48!} = \frac{51!\cdot 48!}{47!\cdot 52!} = \frac{51!\cdot 47!\cdot 48}{47!\cdot 51!\cdot 52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}.$$

б) Вычислим вероятность противоположного события $\overline{A}$ (есть туз пик): $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{12}{13} = \frac{1}{13}$.

***Пример 2***

Из класса, в котором 15 девочек и 10 мальчиков, жеребьевкой выбирают команду для игры КВН численностью 15 человек. Какова вероятность того, что будут выбраны 10 девочек и 5 мальчиков?

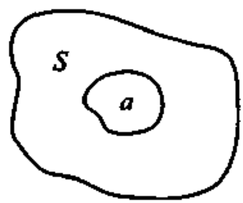
Из 25 человек команду численностью 15 человек можно выбрать $N = C_{25}^{15}$ способами. Выбрать 10 девочек из 15 можно $C_{15}^{10}$ способами, выбрать 5 мальчиков из 10 можно $C_{10}^5$ способами. Всего скомплектовать команду можно $N(A) = C_{15}^{10}\cdot C_{10}^5$ способами. Поэтому вероятность рассматриваемого события $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_{15}^{10}\cdot C_{10}^5}{C_{25}^{15}} =$

$=\frac{15!10!15!10}{10!5!5!5!25!}=\frac{91}{356592000}\approx 2,5\cdot 10^{-7}$. Видно, что вероятность такого события чрезвычайно мала – один шанс из четырех миллионов.

Во многих случаях количество всех исходов и интересующих нас исходов бесконечно. Поэтому понятие классической вероятности использовать невозможно.

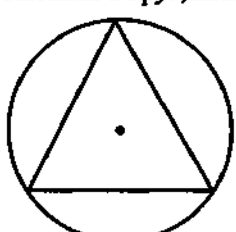
Вероятность случайного события иногда можно найти, используя геометрические соображения (**геометрическая вероятность**).

Предположим, что точку бросают в фигуру площади $S$. Пусть эта фигура содержит фигуру площади $a$. Будем считать вероятностью $P$ попадания точки в меньшую фигуру отношение $\frac{a}{S}$, т. е. $P=\frac{a}{S}$.




***Пример 3***

В окружность вписан правильный треугольник. Найдем вероятность того, что точка, брошенная в круг, попадет в треугольник.



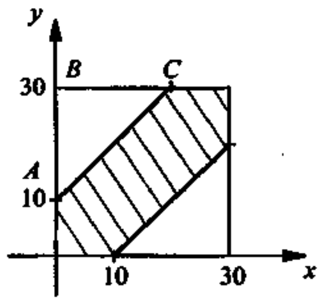
Пусть радиус окружности равен $R$, а сторона треугольника равна $c$. Свяжем между собой эти переменные. Используем теорему синусов: $\frac{c}{\sin 60°}=2R$, откуда $c=2R\sin 60°=2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=r\sqrt{3}$. Найдем площадь треугольника: $a=\frac{c^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Найдем вероятность попадания точки в треугольник: $P=\frac{a}{S}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}:\pi R^2=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0,41$.

***Пример 4***

Коля и Миша договорились встретиться в условленном месте с 10 ч до 10 ч 30 мин, причем каждый пришедший ждет другого 10 мин, после чего уходит. Найдите вероятность того, что встреча состоится, если каждый выбирает момент своего прихода наудачу в указанном интервале.

Пусть $x$ – момент прихода на место встречи Коли, $y$ – момент прихода Миши. Так как время ожидания составляет 10 мин, то для встречи необходимо выполнение неравенства $|y - x| \le 10$, или $-10 \le y - x \le 10$, или $x - 10 \le y \le x + 10$.

На координатной плоскости построим квадрат со стороной 30. Каждая точка этого квадрата соответствует времени прихода мальчиков. Построим также множество точек, удовлетворяющих неравенству $x - 10 \le y \le x + 10$ (эта область заштрихована).




Тогда вероятность встречи мальчиков равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади квадрата. Площадь квадрата равна $30^2 = 900$. Найдем площадь треугольника $ABC$ и получим $\frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 20^2 = 200$. Тогда площадь заштрихованной фигуры: $900 - 2 \cdot 200 = 500$. Вероятность встречи мальчиков $\frac{500}{900} = \frac{5}{9}$.

**IV. Задание на уроке**

§ 54, № 2; 5; 12; 14; 17 (а, б); 23 (а, б); 24.

**V. Задание на дом**

§ 54, № 3; 6; 13; 15; 17 (б, г); 23 (в, г); 25.

**VI. Подведение итогов урока**

# Уроки 63–64. Контрольная работа по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

***Цель***: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Характеристика контрольной работы

Учитывая специфику изученной темы, контрольную работу целесообразно провести по вариантам **одинаковой сложности**. Зачетная работа по теме проводиться не будет.

### III. Варианты контрольной работы

**Вариант 1**

1. Сколькими способами можно разместить 5 различных книг на полке?

2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 1, 3, 6, 7, 9?

3. Из 10 членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Вычислите: $3P_3 + 2A_{10}^2 - C_7^2$.

5. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 17 человек в банке, 23 – в фирме и 19 – в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в фирме.

6. Мишень представляет собой три круга (один внутри другого), радиусы которых равны 3, 7 и 8 см. Стрелок выстрелил не целясь и попал в мишень. Найдите вероятность того, что он попал в средний круг, но не попал в маленький круг.

**Вариант 2**

1. Сколькими способами можно разместить 6 различных книг на полке?

2. Сколько трехзначных чисел с разными цифрами можно составить из цифр 0, 3, 4, 5, 8?

3. Из 8 членов команды надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

4. Вычислите: $P_4 - 2A_9^2 + 3C_8^2$.

5. Выпускники экономического института работают в трех различных компаниях: 19 человек – в банке, 31 – в фирме и 15 – в налоговой инспекции. Найдите вероятность того, что случайно встреченный выпускник работает в банке.

6. Мишень представляет собой три круга (один внутри другого), радиусы которых равны 4, 5 и 9 см. Стрелок выстрелил не целясь и попал в мишень. Найдите вероятность того, что он попал в средний круг, но не попал в маленький круг.

***Ответы***

**Вариант 1**

1. 120.
2. 100.
3. 36.
4. 177.
5. $\frac{23}{59}$.
6. $\frac{5}{8}$.

**Вариант 2**

1. 720.
2. 48.
3. 28.
4. –36.
5. $\frac{19}{65}$.
6. $\frac{1}{9}$.

# Глава 10. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств

## Уроки 65–66. Равносильность уравнений

***Цель***: рассмотреть понятие равносильности уравнений и равносильные преобразования уравнений.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Изучение нового материала**

Разумеется, рассматриваемый материал не является новым: начиная с 7 класса изучались **различные типы уравнений и неравенств** с одной переменной, системы неравенств с одной переменной, системы уравнений с двумя переменными. Столь **огромный интерес** к решению уравнений и неравенств вполне оправдан: именно эти объекты чаще всего являются математическими моделями реальных ситуаций в повседневной жизни, науки и технике. В завершение обучения еще раз обратимся к уравнениям и неравенствам, чтобы рассмотреть их с самых общих позиций.

Необходимо обсудить **принципиальные вопросы**, связанные с решением уравнений с одной переменной: равносильные уравнения и равносильные преобразования уравнений, посторонние корни и потеря корней в уравнениях и т. д.

**Определение 1.** Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными**, если множества их решений совпадают. Другими словами, два уравнения будут **равносильными**, если они **имеют одинаковые корни** или если оба уравнения **не имеют корней**.

***Пример 1***

а) Уравнения $x - 3 = 0$ и $\log_3 x = 1$ **равносильны**, т. к. оба имеют единственный корень $x = 3$.

б) Уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\lg(|x| + 4) = 0$ равносильны, т. к. каждое из них корней не имеет.

**Определение 2.** Если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ (1) является корнем уравнения $p(x) = h(x)$ (2), то уравнение (2) называют следствием уравнения (1).

***Пример 2***

а) Уравнение $x - 3 = 0$ имеет единственный корень $x = 3$, который является также корнем уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ (второй корень этого квадратного уравнения $x = 2$). Поэтому уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ **является следствием** уравнения $x - 3 = 0$.

б) Уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет корни $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$, уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет корни $x_3 = 3$ и $x_4 = 2$ (т. е. оба уравнения имеют **только один общий корень** $x = 3$). Поэтому ни одно из уравнений **не является следствием** другого.

Очевидно, что два уравнения **равносильны** тогда и только тогда, когда **каждое** из них является **следствием другого**.

При решении любых уравнений используется стандартная схема: с помощью преобразований исходное **уравнение заменяется более простым** (как правило, линейным или квадратным), которое затем решают.

***Пример 3***

Показательное уравнение $7^{\sqrt{3x-2}} = 7^{2x-1}$ заменяем иррациональным уравнением $\sqrt{3x-2} = 2x-1$. После возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем квадратное уравнение: $3x-2=(2x-1)^2$ или $0=4x^2-7x+3$. Корни этого уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{3}{4}$ являются также корнями исходного показательного уравнения.

Разумеется, идеальными являются такие преобразования, которые приводят к **равносильным** уравнениям. В этом случае окончательное уравнение имеет **те же корни**, что и исходное. Если преобразования приводят к **уравнениям-следствиям**, то полученное уравнение может иметь и те корни, которые не имеет исходное уравнение (**посторонние корни**). Но все корни исходного уравнения сохраняются, т. е. **потери корней не происходит** (могут лишь появиться посторонние корни).

В идеале решение уравнения осуществляется в три этапа.

**Первый этап – технический.** Проводится цепочка преобразований от исходного до самого простого, которое затем решают.

**Второй этап – анализ решений.** Анализируются выполненные преобразования. Выясняют, все ли такие преобразования являются равносильными.

**Третий этап – проверка.** Если некоторые преобразования могут привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

В связи с изложенной схемой решения уравнения возникают по крайней мере четыре основных вопроса.

1. Какие преобразования приводят к равносильному уравнению?

2. Какие преобразования могут привести к уравнению-следствию?

3. Если в цепочке преобразований было получено уравнение-следствие и найдены его корни, то как их проверить в случае, когда непосредственная проверка приводит к значительным трудностям?

4. В каких случаях преобразования могут привести к потере корней исходного уравнения и как этого избежать?

Последовательно ответим на эти вопросы.

**1. Теоремы о равносильности уравнений**

В основном при решении уравнений используются шесть **теорем равносильности**. Первые три теоремы **безусловные**. Они гарантируют равносильность преобразований без дополнительных условий. Их применение обычно происходит автоматически, без особых размышлений.

**Теорема 1.** Если любой член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному. Например, уравнения $\sqrt{2x+1}-2x+5=0$ и $\sqrt{2x+1}=2x-5$ равносильны.

**Теорема 2.** Если обе части уравнения возвести в одну и ту же **нечетную** степень, то получится уравнение, равносильное данному. Например, уравнения $\sqrt[3]{3x+2}=x$ и $3x+2=x^3$ равносильны.

**Теорема 3.** Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Например, показательное уравнение $3^{\sqrt{2x+1}}=3^{2x-5}$ равносильно иррациональному уравнению $\sqrt{2x+1}=2x-5$.

Следующие три теоремы **условные**. Они справедливы лишь при выполнении определенных условий. При их применении потребуются некоторая внимательность и аккуратность.

Сначала напомним понятие, важное для определенных типов уравнений.

**Определение 3.** Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ (или областью допустимых значений (ОДЗ) переменной такого уравнения) называют множество тех значений переменной $x$, при которых имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

**Теорема 4.** Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

а) имеет смысл в области определения уравнения $f(x) = g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в нуль,

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

***Пример 4***

ОДЗ уравнения $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+2}=\dfrac{2x-5}{x+2}$ задается условиями $2x + 1 \geq 0$ и $x + 2 \neq 0$, что дает $x \geq -0{,}5$. Выражение $h(x) = x + 2$ в этой области имеет смысл и нигде не обращается в нуль. Поэтому уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, т. е. уравнение $\sqrt{2x+1} = 2x-5$ равносильно уравнению $\frac{\sqrt{2x+1}}{x+2} = \frac{2x-5}{x+2}$ (после умножения на выражение $h(x) = x + 2$).

**Теорема 5.** Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень $n$ получится уравнение, равносильное данному: $f^n(x) = g^n(x)$.

***Пример 5***

ОДЗ иррационального уравнения $\sqrt{3x-2} = 2x-1$ задается неравенством $3x - 2 \geq 0$, решение которого $x \geq \frac{2}{3}$.

В этой ОДЗ обе части уравнения неотрицательны. Возведем в квадрат обе части уравнения и получим равносильное квадратное уравнение: $3x - 2 = (2x - 1)^2$ или $0 = 4x^2 - 7x + 3$. Корни $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{3}{4}$ также будут корнями исходного уравнения.

**Теорема 6.** Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

***Пример 6***

В логарифмическом уравнении $\log_7(3x^2 + 2) = \log_7(4|x| + 1)$ функции $f(x) = 3x^2 + 2$ и $g(x) = 4|x| + 1$ принимают положительные значения при всех значениях переменной $x$. Поэтому данное уравнение равносильно уравнению $3x^2 + 2 = 4|x| + 1$. Корни $x_{1,2} = \pm 1$ и $x_{3,4} = \pm\frac{1}{3}$ этого уравнения являются также корнями исходного уравнения.

**2. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие**

Если нарушаются **условия применимости** теорем 4–6, то получится уравнение-следствие. Рассмотрим соответствующие примеры.

***Пример 7***

а) Уравнение $x - 2 = 1$ имеет единственный корень $x = 3$. Умножим обе части данного уравнения на выражение $x - 4$ и получим квадратное уравнение: $(x - 2)(x - 4) = x - 4$ или $x^2 - 7x + 12 = 0$, которое имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$. Корень $x = 4$ является посторонним для уравнения $x - 2 = 1$. Это связано с тем, что обе части исходного уравнения были умножены на выражение $x - 4$, которое обращается в нуль при $x = 4$ (нарушены условия теоремы 4). Именно это значение оказалось посторонним корнем. Поэтому уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$ является следствием уравнения $x - 2 = 1$.

б) Рассмотрим то же самое уравнение $x - 2 = 1$ и возведем обе его части в квадрат. Получим квадратное уравнение: $(x - 2)^2 = 1$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$. Оно имеет два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Второй корень $x = 1$ является посторонним для уравнения $x - 2 = 1$. Это связано с тем, что обе части исходного уравнения были возведены в квадрат (четная степень). При этом левая часть $x - 2$ может быть и отрицательной (нарушены условия теоремы 5). Поэтому уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ – следствие уравнения $x - 2 = 1$.

в) Обсудим уравнение $\log_7(x^2 + 5x) = \log_7 2x + 4$. Потенцируя, получим уравнение: $x^2 + 5x = 2x + 4$ или $x^2 + 3x - 4 = 0$, корни которого $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$. Второй корень $x = -4$ является посторонним для логарифмического уравнения, т. к. выражения $x^2 + 5x$ и $2x + 4$ принимают отрицательные значения. Появление постороннего корня связано с нарушением условий теоремы 6. Поэтому уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$ – следствие уравнения $\log_7(x^2 + 5x) = \log_7 2x + 4$.

К появлению посторонних корней может привести **расширение области определения уравнения**. Возможные **причины** расширения ОДЗ:

1) **избавление от знаменателей**, содержащих переменную величину;

2) **избавление от корней четной степени;**

3) **избавление от знаков логарифмов.**

***Пример 8***

Решим уравнение:

а) $\dfrac{x^2 - 4x}{x - 2} = \dfrac{x - 6}{x - 2}$. ОДЗ этого уравнения – любые значения $x$, кроме $x = 2$. Умножим обе части уравнения на выражение $x - 2$. Получим квадратное уравнение: $x^2 - 4x = x - 6$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$. ОДЗ такого уравнения – любые действительные значения $x$. При этом область определения уравнения расширилась. Корни квадратного уравнения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. При этом корень $x = 2$ в ОДЗ исходного уравнения не входит и не является его решением. Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x = 3$;

б) $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{2x - 6}$. ОДЗ такого уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} x^2 - 3x \ge 0, \\ 2x - 6 \ge 0, \end{cases}$ решение которой $x \ge 3$. Возведем в квадрат (четная степень) обе части данного иррационального уравнения. Получим квадратное уравнение: $x^2 - 3x = 2x - 6$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$. ОДЗ этого уравнения – любые действительные значения $x$. Видно, что область определения уравнения расширилась. Корни квадратного уравнения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Второй корень в ОДЗ исходного уравнения не входит и не является его решением. Поэтому данное уравнение имеет только корень $x = 3$;

в) $\log_7(x^2 - 2x) = \log_7(3x - 6)$. ОДЗ этого уравнения определяется системой неравенств $\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ 3x - 6 > 0, \end{cases}$ решение которой $x > 2$. Потенцируя, получим квадратное уравнение: $x^2 - 2x = 3x - 6$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$. ОДЗ такого уравнения – любые действительные значения $x$. Область определения уравнения расширилась. Корни квадратного уравнения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. При этом корень $x = 2$ в ОДЗ данного уравнения не входит и является посторонним.

На примере рассмотрим этапы решения уравнения.

*Пример 9*

Решим уравнение $\sqrt{3x-2} + \sqrt{6x+4} = 6$.

**Первый этап** – технический. Выполним цепочку преобразований, получим наиболее простое уравнение и решим его.

Уединим один из корней в левой части и запишем уравнение в виде: $\sqrt{6x+4} = 6 - \sqrt{3x-2}$. Возведем в квадрат обе части уравнения: $(\sqrt{6x+4})^2 = (6 - \sqrt{3x-2})^2$, или $6x + 4 = 36 - 12\sqrt{3x-2} + 3x - 2$, или $6x + 4 = 34 - 123x - 2 + 3x$. Опять уединим в левой части корень и получим: $12\sqrt{3x-2} = 30 - 3x$ или $4\sqrt{3x-2} = 10 - x$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $16(3x-2) = (10-x)^2$ или $0 = x^2 - 68x + 132$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 66$.

**Второй этап** – анализ решения. Проверим выполненные преобразования на равносильность. Два раза части уравнения возводились в квадрат, что не является равносильным преобразованием. Поэтому проверка корней обязательна.

**Третий этап** – проверка. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

При $x = 2$ получаем: $\sqrt{3 \cdot 2 - 2} + \sqrt{6 \cdot 2 + 4} = 6$ или $2 + 4 = 6$ – верное равенство.

При $x = 66$ имеем: $\sqrt{3 \cdot 66 - 2} + \sqrt{6 \cdot 66 + 4} = 6$ – явно неверное равенство, т. к. уже первое слагаемое в левой части равно 14 и второе слагаемое положительно. Поэтому $x = 66$ – посторонний корень. Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x = 2$.

Заметим, что корень $x = 66$ можно было проверить и проще. На некотором этапе преобразований было получено уравнение $4\sqrt{3x-2}=10-x$. Левая часть его неотрицательна. Поэтому правая часть также должна быть неотрицательной, т. е. $10 - x \geq 0$, откуда $x \leq 10$. Тогда корень $x = 66$ будет посторонним.

**3. О проверке корней**

Очень часто при проверке корней уравнения используют ОДЗ.

***Пример 10***

Решим уравнение $\lg(x + 3) = -\lg(2x + 5)$.

**Первый этап.** Запишем уравнение в виде $\lg(x + 3) + \lg(2x + 5) = 0$. Используя формулу для суммы логарифмов, получим: $\lg[(x+3)(2x+5)] = 0$ или $\lg(2x^2+11x+15) = 0$. По определению логарифма имеем квадратное уравнение: $2x^2 + 11x + 15 = 1$ или $2x^2 + 11x + 14 = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = -2$ и $x_2 = -3{,}5$.

**Второй этап.** При использовании формулы для суммы логарифмов происходит расширение области определения уравнения. Поэтому проверка корней обязательна.

**Третий этап.** Так как неравносильные преобразования не применялись, то проверка корней может быть выполнена по ОДЗ исходного уравнения. Эта область определяется системой неравенств $\begin{cases} x+3>0, \\ 2x+5>0. \end{cases}$ Корень $x_1 = -2$ этой системе удовлетворяет, а корень $x_2 = -3{,}5$ не удовлетворяет уже первому неравенству. Поэтому этот корень посторонний. Итак, данное уравнение имеет единственный корень $x = -2$.

Заметим, что в повседневной жизни при решении уравнений обычно явно не выделяют три этапа. Хотя все эти три этапа решения в той или иной форме выполняют.

***Пример 11***

Решим уравнение $\log_{x-5}\sin x = \log_{x-5}\cos x + \log_{x-5}\sqrt{3}$.

Запишем уравнение в виде $\log_{x-5}\sin x - \log_{x-5}\cos x = \log_{x-5}\sqrt{3}$ и используем формулу для разности логарифмов. Получим: $\log_{x-5}\dfrac{\sin x}{\cos x} = \log_{x-5}\sqrt{3}$ или $\log_{x-5}\operatorname{tg} x = \log_{x-5}\sqrt{3}$. Потенцируя, придем к тригонометрическому уравнению $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Его решения $x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$ (где $n \in Z$). Однако надо учесть ОДЗ уравнения, которая определяется системой неравенств $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ x - 5 > 0, \\ x - 5 \neq 1. \end{cases}$

Первые два неравенства означают, что угол $x$ располагается в первой координатной четверти. Поэтому $n$ должно быть числом четным, т. е. $n = 2k$ (где $k \in Z$). Тогда найденное решение имеет вид $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ (где $k \in Z$). Из третьего неравенства получаем $x > 5$. Наши решения попадают в этот промежуток только при $k = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. при $k \in N$. Четвертое неравенство выполняется всегда, т. к. $\pi$ – число иррациональное и $x \neq 6$ при любом натуральном значении $k$. Итак, данное логарифмическое уравнение имеет решения $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in N$.

В данном примере все три этапа решения были проведены параллельно и взаимосвязанно.

Разумеется, проверка решения по ОДЗ не является единственной и не всегда дает результат. Например, в примере 9, помимо расширения ОДЗ уравнения, имели место неравносильные преобразования. Поэтому, хотя оба значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 66$ находились в ОДЗ данного уравнения, корень $x = 66$ оказался посторонним. Для подобных случаев рекомендуем проверять решения подстановкой или использовать другие соображения.

**4. О потере корней**

В предыдущем разделе обсуждался вопрос о **появлении посторонних корней**. Эти корни могут быть обнаружены путем их проверки (например, подстановкой). Гораздо хуже, если в ходе преобразований происходит **потеря корней** уравнения.

Укажем две **причины потери корней** при решении уравнений:

1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выражение $h(x) \neq 0$);

2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

В первом случае обычно используют **разложение уравнения на множители**, т. е. уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ записывают в виде $g(x)[f(x) - g(x)] = 0$. Далее такое уравнение распадается на два: а) $h(x) = 0$; б) $f(x) - g(x) = 0$.

***Пример 12***

Решим уравнение $(2x-1)(x^2+3) = 4x(2x-1)$.

Перенесем все члены уравнения в левую часть и вынесем общий множитель $2x - 1$ за скобки. Получаем: $(2x-1)(x^2+3-4x)=0$. Если произведение множителей равно нулю, то один из них равен нулю, а остальные не теряют смысла. Получаем два уравнения:

а) линейное уравнение $2x - 1 = 0$ и его корень $x_1 = 0{,}5$;

б) квадратное уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ и его корни $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$.

Таким образом, данное уравнение имеет три корня: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Во втором случае необходимо **грамотно применять** имеющиеся **формулы**.

***Пример 13***

Решим уравнение $\log_3 \dfrac{2x+3}{x-1} = 0$.

Используем формулу для логарифма частного и получим $\log_3(2x+3)-\log_3(x-1)=0$. Запишем уравнение в виде $\log_3(2x+3)=$ $=\log_3(x-1)$. Потенцируя, получим линейное уравнение $2x + 3 = x - 1$, корень которого $x = -4$. Легко проверить, что для такого значения $x$ выражения $2x + 3$ и $x - 1$ отрицательны. Поэтому $x = -4$ не является корнем уравнения $\log_3(2x+3)=\log_3(x-1)$. Тем не менее $x = -4$ является корнем исходного уравнения. Это связано с тем, что в ходе преобразований была **сужена ОДЗ** уравнения. Действительно, ОДЗ исходного уравнения определяется неравенством $\dfrac{2x+3}{x-1} > 0$ и $x \in (-\infty; -1{,}5) \cup (1; \infty)$. ОДЗ преобразованного уравнения $\log_3(2x+3)=\log_3(x-1)$ определяется системой неравенств $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x-1>0, \end{cases}$ решение которой $x \in (1; \infty)$. Таким образом, ОДЗ исходного уравнения была сужена на промежуток $(-\infty; -1{,}5)$, в который и попал корень $x = -4$.

Разумеется, данное уравнение $\log_3 \dfrac{2x+3}{x-1} = 0$ надо решать по-другому. Используя определение логарифма, сразу получаем рациональное уравнение $\dfrac{2x+3}{x-1} = 1$. Затем приходим к линейному уравнению $2x + 3 = x - 1$ и находим единственный корень этого и исходного уравнений $x = -4$.

***Пример 14***

Решим уравнение $\log_{2x}(4x)+\log_{4x}(16x)=4$.

Так как основания логарифмов разные, то перейдем к основанию $x$. Используем формулу для логарифма произведения и получим: $\frac{\log_x(4x)}{\log_x(2x)}+\frac{\log_x(16x)}{\log_x(4x)}=4$, или $\frac{\log_x 4+1}{\log_x 2+1}+\frac{\log_x 16+1}{\log_x 4+1}=4$, или $\frac{2\log_x 2+1}{\log_x 2+1}+$ $+\frac{4\log_x 2+1}{2\log_x 2+1}=4$. Введем новую переменную $a=\log_x 2$. Имеем рациональное уравнение: $\frac{2a+1}{a+1}+\frac{4a+1}{2a+1}=4$, или $(2a+1)^2+(a+1)(4a+1)=$ $=4(a+1)(2a+1)$, или $-2 = 3a$, откуда $a=-\frac{2}{3}$. Вернемся к старой переменной. Получаем уравнение: $\log_x 2=-\frac{2}{3}$. По определению логарифма имеем: $x^{-\frac{2}{3}}=2$. Возведем обе части этого равенства в степень $\left(-\frac{3}{2}\right)$ и найдем $x=2^{-\frac{3}{2}}$. Проверка показывает, что это корень исходного уравнения. Вместе с тем легко проверить, что $x = 1$ также корень исходного уравнения. Он был потерян при переходе к логарифмам с основанием $x$ ($x \neq 1$). При этом произошло сужение ОДЗ уравнения.

Разумнее было бы в исходном уравнении переходить к логарифмам с **известным основанием**, например с основанием 2. Получаем: $\frac{\log_2(4x)}{\log_2(2x)}+\frac{\log_2(16x)}{\log_2(4x)}=4$, или $\frac{\log_2 4+\log_2 x}{\log_2 2+\log_2 x}+\frac{\log_2 16+\log_2 x}{\log_2 4+\log_2 x}=4$, или $\frac{2+\log_2 x}{1+\log_2 x}+\frac{4+\log_2 x}{2+\log_2 x}=4$. Введем новую переменную $b=\log_2 x$. Имеем рациональное уравнение: $\frac{2+b}{1+b}+\frac{4+b}{2+b}=4$, или $(2+b)^2+(1+b)(4+b)=$ $=4(1+b)(2+b)$, или $0 = 2b^2 + 3b$, или $0=2b\left(b+\frac{3}{2}\right)$. Корни этого уравнения $b_1 = 0$ и $b_2=-\frac{3}{2}$. Вернемся к старой переменной. Получаем два уравнения: $\log_2 x = 0$ (корень $x_1 = 2^0 = 1$) и $\log_2 x=-\frac{3}{2}$ (корень $x_2=2^{-\frac{3}{2}}$). Итак, данное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2=2^{-\frac{3}{2}}$.

**III. Контрольные вопросы**

1. Понятие равносильных уравнений.
2. Определение уравнения-следствия.
3. Три этапа решения уравнения.
4. Теоремы о равносильности уравнений (фронтальный опрос).
5. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие.
6. Расширение области определения уравнения.
7. Причины потери корней при решении уравнений.

**IV. Задание на уроках**

§ 55, № 1; 3 (а, б); 4; 6 (а); 7 (б); 8 (а); 9 (б, в); 10 (а, б); 11 (а); 12 (б, г).

**V. Задание на дом**

§ 55, № 2; 3 (в, г); 5; 6 (б); 7 (а); 8 (б); 9 (а, г); 10 (в, г); 11 (б); 12 (а, в).

**VI. Подведение итогов уроков**

## Уроки 67–68. Общие методы решения уравнений

***Цель***: обсудить некоторые методы решения уравнений.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Причины появления посторонних корней при решении уравнений.

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x+1} = 3x-1$;

б) $\sin 3x \cdot \sqrt{4-x^2} = 0$.

**Вариант 2**

1. Причины потери корней при решении уравнений.

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{5x-4} = 2x-1$;

б) $(\cos 3x - 1) \cdot \sqrt{4-x^2} = 0$.

**III. Изучение нового материала**

При рассмотрении каждой темы курса алгебры 7 – 11 классов изучались и соответствующие уравнения. Можно было заметить, что при их решении используются похожие приемы. Теперь обобщим эти наблюдения и рассмотрим **наиболее общие методы решения уравнений** любых видов.

**1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$**

Если функция $h(x)$ **монотонная**, то она принимает **каждое** свое **значение** только **один раз**. Тогда от уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ можно перейти к более простому уравнению $f(x) = g(x)$. Если $h(x)$ – **немонотонная** функция, то такой метод применять **нельзя**, т. к. возможна **потеря корней**.

***Пример 1***

а) $(x^2+3x-23)^5=(4x-3)^5$. Так как функция $h(x) = x^5$ **монотонная** (возрастающая), то данное уравнение равносильно квадратному уравнению: $x^2 + 3x - 23 = 4x - 3$ или $x^2 - x - 20 = 0$. Корни этого (и исходного) уравнения $x_1 = -4$ и $x_2 = 5$.

б) $(x^2-11x+9)^2=(2x+9)^2$. Функция $h(x)$ **немонотонная**, и использовать рассматриваемый метод нельзя. Разумеется, необходимо решать два квадратных уравнения: $x^2 - 11x + 9 = 2x + 9$ (его корни $x_1 = 0$ и $x_2 = 13$) и $x^2 - 11x + 9 = -(2x + 9)$ (его корни $x_3 = 3$ и $x_4 = 6$). Таким образом, при неграмотном использовании метода будут потеряны корни $x_3$ и $x_4$.

Рассмотренный метод применяется в случае монотонных функций $h(x)$, например при решении:

– показательного уравнения $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) при переходе к уравнению $f(x) = g(x)$;

– логарифмического уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) при переходе к уравнению $f(x) = g(x)$;

– иррационального уравнения $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ при переходе к уравнению $f(x) = g(x)$ и т. д.

***Пример 2***

Решим уравнение $\log_{0,5}\sqrt{-x^2+4}=\log_{0,5}\sqrt{3x}$.

Логарифмическая функция $h(x) = \log_{0,5}x$ монотонная (убывающая). Поэтому можем перейти к равносильному уравнению $\sqrt{-x^2+4}=\sqrt{3x}$. Иррациональная функция $h(x)=\sqrt{x}$ также монотонная (возрастающая). Тогда переходим к равносильному квадратному уравнению $-x^2 + 4 = 3x$ или $0 = x^2 + 3x - 4$, корни которого $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$. Корень $x = -4$ не входит в ОДЗ исходного уравнения и является посторонним. Итак, данное уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

**2. Метод разложения на множители**

Суть метода состоит в том, что уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ заменяют **совокупностью** уравнений: $f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $h(x) = 0$. Решив совокупность этих уравнений, выбирают те корни, которые входят в ОДЗ исходного уравнения (остальные корни являются посторонними).

***Пример 3***

Решим уравнение $(2^{\sqrt{x+2}}-2)(x^2-x-6)\log_3(2x-1)=0$.

ОДЗ этого уравнения задается системой неравенств $\begin{cases} x+2\geq 0, \\ 2x-1>0, \end{cases}$ решение которой $x > 0{,}5$. Данное уравнение сводится к совокупности трех уравнений: $2^{\sqrt{x+2}}-2=0$ (корень $x_1 = -1$); $x^2 - x - 6 = 0$ (корни $x_2 = -2$ и $x_3 = 3$); $\log_3(2x - 1) = 0$ (корень $x_4 = 1$). В ОДЗ уравнения входят только корни $x = 3$ и $x = 1$, которые являются решениями исходного уравнения.

***Пример 4***

Решим уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого сгруппируем первое и третье слагаемые в левой части и преобразуем сумму синусов в произведение. Получаем: $(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=0$, или $2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$, или $\sin 2x(2\cos x+1)=0$. Тогда данное уравнение сводится к совокупности уравнений:

а) $\sin 2x=0$, поэтому $2x=\pi n$ (где $n\in Z$) и $x=\dfrac{\pi}{2}n$;

б) $2\cos x + 1 = 0$, тогда $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\pi k=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$ (где $k\in Z$).

Так как ОДЗ исходного уравнения – любые действительные значения $x$, то решения уравнения: $x=\dfrac{\pi}{2}n$ (где $n\in Z$) и $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$ (где $k\in Z$).

Особенно полезен этот метод, если в уравнение входят **функции разного вида.**

***Пример 5***

Решим уравнение $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}$.

Перенесем все члены уравнения в левую часть и сгруппируем их: $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}-x^2\cdot 2^{|x-3|+4}-2^{x-1}=0$ или $(x^2\cdot 2^{x+1}-2^{x-1})-$

$-(x^2\cdot 2^{|x-3|+4}-2^{|x-3|+2})=0$. Вынесем общие множители $2^{x-1}$ и $2^{|x-3|+2}$ за скобки и разложим левую часть уравнения на множители: $2^{x-1}(x^2\cdot 4-1)-2^{|x-3|+2}(x^2\cdot 4-1)=0$ или $(4x^2-1)(2^{x-1}-2^{|x-3|+2})=0$. Это уравнение сводится к совокупности:

а) квадратного уравнения $4x^2-1=0$ (корни $x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}$);

б) показательного уравнения $2^{x-1}-2^{|x-3|+2}=0$ (его решения $x\ge 3$).

Так как ОДЗ исходного уравнения – любое действительное число $x$, то решения этого уравнения $x\in\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup[3;+\infty)$.

**3. Метод введения новой переменной**

Этот распространенный метод используется при решении **уравнений самых разных типов**. Суть метода состоит в следующем. Если уравнение $f(x)=0$ имеет вид (или может быть приведено к виду) $p(g(x))$, то вводят новую переменную $u=g(x)$. Получают уравнение $p(u)=0$ и решают его (находят корни $u_1, u_2, \ldots, u_n$). Затем возвращаются к старой переменной и получают совокупность уравнений: $g(x)=u_1$; $g(x)=u_2$; …; $g(x)=u_n$. Решая эту совокупность, находят корни данного уравнения.

***Пример 6***

Решим уравнение $\dfrac{1}{3^x+4}=\dfrac{3^x}{3^x+18}$.

В данное уравнение неизвестная $x$ входит только в функции $u=3^x$. Поэтому введем новую переменную $u=3^x>0$ и получим рациональное уравнение $\dfrac{1}{u+4}=\dfrac{u}{u+18}$. Используя свойство пропорции, преобразуем его к квадратному уравнению: $u+18=u(u+4)$ или $u^2+3u-18=0$. Корни этого уравнения $u_1=3$ и $u_2=-6$ (посторонний корень, т. к. $u>0$). Возвращаясь к старой неизвестной $x$, получаем простейшее показательное уравнение $3^x=3$, откуда $x=1$.

Разумеется, в большинстве случаев необходимость введения новой переменной не столь очевидна и требует предварительного **преобразования уравнения**.

***Пример 7***

Решим уравнение $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$.

Преобразуем левую часть уравнения. Для этого изменим порядок умножения: перемножим первую и четвертую, а также вторую и третью скобки. Получим: $[(x-2)(x+7)][(x+1)(x+4)]=19$ или

$(x^2+5x-14)(x^2+5x+4)=19$. Видно, что в уравнение неизвестная $x$ входит в виде квадратичной функции $x^2+5x$ и ее можно ввести в качестве новой переменной. Однако практика показывает, что в качестве новой переменной удобнее выбрать полусумму скобок $u=\dfrac{(x^2+5x-14)+(x^2+5x+4)}{2}=x^2+5x-5$. Тогда получаем неполное квадратное уравнение: $(u-9)(u+9)=19$ или $u^2=100$, корни которого $u_{1,2}=\pm 10$. Вернемся к старой неизвестной $x$ и получим совокупность двух квадратных уравнений:

а) $x^2+5x-5=10$ или $x^2+5x-15=0$ и его корни $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{85}}{2}$;

б) $x^2+5x-5=-10$ или $x^2+5x+5=0$ и его корни $x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение четвертой степени имеет четыре иррациональных корня. Поэтому решить такое уравнение **другим способом** (например, подбором целого корня и понижением степени уравнения) **невозможно**.

В некоторых случаях при решении уравнения удобно ввести не одну, а **две новые переменные** и получить **систему уравнений**.

***Пример 8***

Решим уравнение $\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt{5x-1}=1$.

Введем две новые переменные: $a=\sqrt[3]{2-5x}$ и $b=\sqrt{5x-1}$. Используя данное уравнение, запишем уравнение $a+b=1$. Теперь необходимо получить второе уравнение. Поэтому возведем выражение для $a$ в куб, для $b$ – в квадрат. Получаем два равенства: $a^3=2-5x$ и $b^2=5x-1$. Сложим эти равенства (при этом исключается переменная $x$) и получим второе уравнение $a^3+b^2=1$. Итак, исходное уравнение сводится к системе уравнений $\begin{cases}a+b=1,\\ a^3+b^2=1\end{cases}$ (заметим, что для нахождения неизвестной $x$ достаточно определить или $a$, или $b$). Из первого уравнения системы выразим $b=1-a$ и подставим во второе уравнение. Получаем кубическое уравнение: $a^3+(1-a)^2=1$, или $a^3+a^2-2a=0$, или $a(a^2+a-2)=0$. Корни этого уравнения $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-2$ (при этом для каждого из этих корней величина $b\geq 0$). Из выражения для $a^3=2-5x$ найдем $x=\dfrac{2-a^3}{5}$. Соответственно, находим три корня исходного уравнения: $x_1=\dfrac{2}{5}=0{,}4$; $x_2=\dfrac{1}{5}=0{,}2$; $x_3=2$.

Иногда замена переменной и решение уравнения могут выглядеть достаточно **необычно**.

***Пример 9***

Решим уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Понятно, что возведение в куб обеих частей уравнения приведет к уравнению девятой степени (решить которое весьма проблематично). Введем новую переменную $u=\sqrt[3]{2x-1}$ и получим первое уравнение $x^3+1=2u$. Теперь необходимо получить второе уравнение. Для этого выражение для $u$ возведем в куб: $u^3=2x-1$. Запишем это равенство в виде $u^3+1=2x$. Получили систему уравнений $\begin{cases} x^3+1=2u, \\ u^3+1=2x. \end{cases}$

Вычтем уравнения друг из друга: $x^3-u^3=2(u-x)$. Запишем это равенство в виде $(x-u)(x^2+xu+u^2+2)=0$. Получаем совокупность уравнений:

а) $x-u=0$, откуда $u=x$;

б) $x^2+xu+u^2+2=0$, и это уравнение решений не имеет.

Действительно, его левую часть легко привести к виду $\left(x+\frac{u}{2}\right)^2+$ $+\frac{3}{4}u^2+2=0$. Видно, что левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных и одного положительного слагаемого. Разумеется, такая сумма не обращается в нуль ни при каких значениях $x$ и $u$.

Итак, $u=x$. Подставим это равенство, например, в первое уравнение системы и получим кубическое уравнение: $x^3+1=2x$ или $x^3-2x+1=0$. Один корень этого уравнения $x_1=1$. Понизив степень уравнения обычным способом, получим квадратное уравнение $x^2+x-1=0$, корни которого $x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет три корня: $x_1=1$; $x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Заметим, что другим способом решить это уравнение не удается.

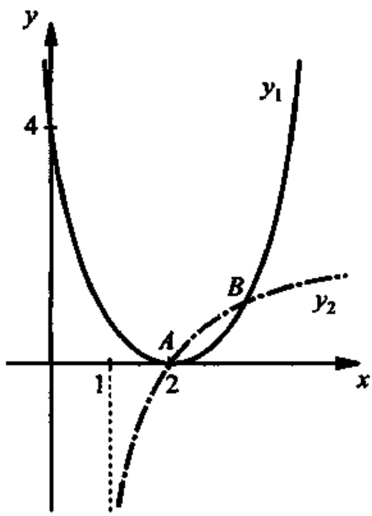
**4. Функционально-графический метод**

При **графическом методе** решения уравнения $f(x)=g(x)$ строят графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Затем находят точки пересечения этих графиков. Абсциссы таких точек являются корнями данного уравнения. Этот метод позволяет определить число корней, их приближенные, а иногда и точные значения.

*Пример 10*

Определим число корней уравнения $x^2-4x+4=\log_3(x-1)$ и найдем его наименьший корень.

Построим график функции $y_1=x^2-4x+4=(x-2)^2$. Он получается смещением графика $y=x^2$ на 2 единицы вправо. Также построим график функции $y_2=\log_3(x-1)$, который получается смещением графика $y=\log_3 x$ на 1 единицу вправо. Видно, что графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекаются в двух точках $A$ и $B$. Следовательно, данное уравнение имеет два корня.




Абсцисса точки $A$ меньше абсциссы точки $B$. При этом абсцисса точки $A$ равна 2. Поэтому наименьший корень уравнения $x=2$. Второй корень уравнения можно определить только приближенно.

В ряде случаев построение графиков функций можно заменить ссылкой на определенные свойства функций. Поэтому в подобных случаях говорят о **функционально-графическом** методе решения уравнений. Если, например, **одна из функций** $y=f(x)$, $y=g(x)$ **возрастает, а другая убывает, то уравнение** $f(x)=g(x)$ **или не имеет корней, или имеет единственный корень** (который иногда можно угадать).

*Пример 11*

Решим уравнение $2^{x-2}=3-x$.

Корень такого уравнения легко угадать: $x = 2$. Докажем, что этот корень единственный. Функция $y = 2^{x-2}$ возрастает, а функция $y = 3 - x$ убывает. Поэтому данное уравнение имеет единственный корень (который уже был угадан).

Если на промежутке наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно $A$ и наименьшее значение другой функции тоже равно $A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ на этом промежутке равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

***Пример 12***

Решим уравнение $3\sin\frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 7.$

Рассмотрим функцию $f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{4}$. В силу ограниченности функции синус наибольшее значение функции $f(x)$ равно $A = 3$. Функцию $g(x) = x^2 - 4x + 7$ запишем в виде $g(x) = (x-2)^2 + 3$. Очевидно, что наименьшее значение функции $g(x)$ равно $A = 3$. Поэтому данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} 3\sin\frac{\pi x}{4} = 3, \\ (x-2)^2 + 3 = 3. \end{cases}$ Очевидно, что корень второго уравнения $x = 2$. Легко проверить, что этот корень удовлетворяет и первому уравнению. Следовательно, система уравнений (а также исходное уравнение) имеет единственный корень $x = 2$.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Условие замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.
2. Метод разложения на множители.
3. Метод введения новой переменной.
4. Графический и функционально-графический методы.

**V. Задание на уроках**

§ 56, № 1; 2; 4; 9 (а); 11 (б); 13 (а); 14 (а, б); 16 (б); 19 (а, б); 21 (б); 23 (а); 27 (б); 30 (а); 33 (б); 35 (а); 38 (б, в); 41 (а).

**VI. Задание на дом**

§ 56, № 3; 5; 9 (б); 11 (а); 13 (б); 14 (в, г); 16 (а); 19 (в, г); 21 (а); 23 (б); 27 (а); 30 (б); 33 (а); 35 (б); 38 (а, г); 41 (б).

**VII. Подведение итогов уроков**

# Уроки 69–71. Решение неравенств с одной переменной

***Цель***: рассмотреть основные понятия и способы решения неравенств.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Метод разложения на множители при решении уравнений.

2. Решите уравнение:

а) $\sin x + \sin 4x + \sin 7x = 0$;

б) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$;

в) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

**Вариант 2**

1. Метод введения новой переменной при решении уравнений.

2. Решите уравнение:

а) $\cos x + \cos 5x + \cos 9x = 0$;

б) $3^{x+1} - 8 = 3^{1-x}$;

в) $\log_2 x - \log_x 64 = 1$.

### III. Изучение нового материала

Аналогично рассмотрению уравнений необходимо обсудить вопросы, связанные с неравенствами: их равносильность, равносильные преобразования, системы и совокупности неравенств, некоторые способы решения неравенств и т. д. При этом необходимо **обобщить** уже известные **идеи и методы**.

**1. Равносильность неравенств**

**Решением неравенства** $f(x) > g(x)$ называют такое значение переменной $x$, при котором данное неравенство является верным числовым неравенством. Иногда такое решение называют **частным решением**. Множество всех частных решений дает **общее решение** неравенства (обычно его называют просто решением).

**Определение 1.** Два неравенства $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ с одной переменной называют **равносильными**, если их **решения совпадают**.

***Пример 1***

Неравенства $\log_3(x-2) < 1$ и $(x-2)(x-5) < 0$ **равносильны**, т. к. имеют одинаковое решение: $2 < x < 5$.

**Определение 2.** Если решение неравенства $f(x) > g(x)$ (1) содержится в решении неравенства $p(x) > h(x)$ (2), то неравенство (2) называют следствием неравенства (1).

***Пример 2***

Неравенство $x - 2 > 0$ (его решение $x > 2$) является **следствием** неравенства $\log_3(x-2) < 1$ (решение $2 < x < 5$), т. к. решение $2 < x < 5$ содержится в решении $x > 2$.

Обращайте внимание **на знаки** рассматриваемых **неравенств**. Например, если рассмотреть неравенства противоположных знаков: $x - 2 < 0$ (решение $x < 2$) и $\log_3(x-2) > 1$ (решение $x > 5$), то ни одно из них не является следствием другого.

При решении уравнений посторонние корни легко устраняются при проверке. Решением неравенства, как правило, являются числовые промежутки (т. е. бесконечное множество чисел). Поэтому проверка практически ничего не дает. Следовательно, при решении неравенств необходимо выполнять только **равносильные преобразования**. При этом используются **шесть теорем равносильности неравенств** (аналогичные теоремам равносильности уравнений).

**Теорема 1.** Если любой член неравенства перенести с противоположным знаком из одной части неравенства в другую, сохранив знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.

***Пример 3***

Неравенство $x^2 + 6 \geq 5x$ равносильно неравенству $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

**Теорема 2.**

а) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, положительное при всех $x$ из ОДЗ данного неравенства, сохранив при этом знак неравенства, то получится неравенство $f(x)h(x) > g(x)h(x)$, равносильное данному.

б) Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, отрицательное при всех $x$ из ОДЗ данного неравенства, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)h(x) < g(x)h(x)$, равносильное данному.

***Пример 4***

а) Неравенство $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+4}} > \dfrac{x-8}{\sqrt{x^2+4}}$ равносильно неравенству $2x - 3 > x - 8$ (обе части умножили на выражение $\sqrt{x^2+4}$, положительное при всех значениях $x$).

б) Неравенство $\dfrac{7x+2}{\log_{0,3}(x^2+3)} \le \dfrac{2x+7}{\log_{0,3}(x^2+3)}$ равносильно неравенству $7x+2 \ge 2x+7$ (обе части умножили на выражение $\log_{0,3}(x^2+3)$, отрицательное при всех значениях $x$, и изменили при этом знак неравенства).

**Теорема 3.** Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ возвести в одну и ту же нечетную степень $n$, сохранив знак неравенства, то получится неравенство $f^n(x) > g^n(x)$, равносильное данному.

***Пример 5***

Неравенство $\sqrt[5]{3x-2} > \sqrt[5]{x+6}$ равносильно неравенству $3x-2 > x+6$ (обе части возвели в нечетную (пятую) степень).

**Теорема 4.** Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ неотрицательны в его ОДЗ, то после возведения обеих частей в одну и ту же четную степень $n$ получится неравенство $f^n(x) > g^n(x)$, равносильное данному.

***Пример 6***

Неравенство $\sqrt{x^2+5x} \le |x+2|$ равносильно неравенству $x^2+5x \le |x+2|^2$ или $x^2+5x \le x^2+4x+4$ в ОДЗ данного неравенства $x \in (-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$ (обе части возвели в четную (вторую) степень). При этом обе части неравенства были неотрицательны.

**Теорема 5.** Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству:

а) $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

***Пример 7***

а) Неравенство $3^{x^2} > 3^{5x-6}$ равносильно неравенству $x^2 > 5x-6$, т. к. $a = 3 > 1$.

б) Неравенство $0,3^{x^2} > 0,3^{5x-6}$ равносильно неравенству $x^2 < 5x-6$, т. к. $0 < a = 0,3 < 1$.

**Теорема 6.** Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству:

а) $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

б) $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

***Пример 8***

а) Неравенство $\log_3(3x-7) > \log_3(2x+1)$ в его ОДЗ ($x > \dfrac{7}{3}$) равносильно неравенству $3x-7 > 2x+1$, т. к. $a = 3 > 1$.

б) Неравенство $\log_{0,3}(3x-7) > \log_{0,3}(2x+1)$ в его ОДЗ ( $x > \dfrac{7}{3}$ ) равносильно неравенству $3x - 7 < 2x + 1$, т. к. $0 < a = 3 < 1$.

Обратите внимание на **условия применимости** теорем. В противном случае возможны грубые ошибки.

***Пример 9***

Решим неравенство $(x-1)3^{x^2} \ge (x-1)3^{5x-6}$.

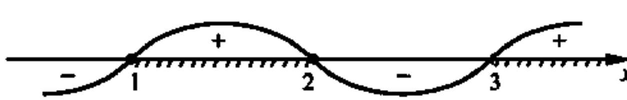
Используем теорему 2 и рассмотрим три случая.

а) При $x > 1$ умножим обе части неравенства на положительное выражение $\dfrac{1}{x-1}$ и получим равносильное неравенство $3^{x^2} \ge 3^{5x-6}$. Используя теорему 5, приходим к равносильному неравенству $x^2 \ge 5x - 6$ или $x^2 - 5x + 6 \ge 0$. Решение этого неравенства: $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. С учетом условия $x > 1$ получаем решение в этом случае: $x \in (1; 2] \cup [3; +\infty)$.

б) Очевидно, что $x = 1$ является решением данного неравенства.

в) При $x < 1$ умножим обе части данного неравенства на отрицательное выражение $\dfrac{1}{x-1}$ и получим равносильное неравенство $3^{x^2} \le 3^{5x-6}$. Используя теорему 5, приходим к равносильному неравенству: $x^2 \le 5x - 6$ или $x^2 - 5x + 6 \le 0$. Решение этого неравенства: $x \in [2; 3]$. С учетом условия $x < 1$ в этом случае неравенство решения не имеет.

Учитывая рассмотренные случаи *а* – *в*, получаем решение данного неравенства $x \in [1; 2] \cup [3; +\infty)$. Разумеется, проще всего решить исходное неравенство, применяя метод интервалов. Запишем неравенство в виде $(x-1)(3^{x^2} - 3^{5x-6}) \ge 0$. Корни данного выражения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$. Теперь легко построить диаграмму знаков этого выражения и записать ответ: $x \in [1; 2] \cup [3; +\infty)$.




Заметим, что мы несколько изменили порядок изложения теорем по сравнению с учебником (на наш взгляд, такой порядок логичнее).

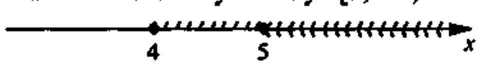
**2. Системы и совокупности неравенств**

**Определение 3.** Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если необходимо найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением **всех** данных неравенств. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением системы неравенств**. Множество всех частных решений системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят: **решение системы неравенств**). Решить систему неравенств – значит найти все ее частные решения. **Решение системы неравенств** представляет собой **пересечение решений** всех неравенств. Неравенства, образующие систему, объединяются **фигурной скобкой**.

***Пример 10***

Решим систему неравенств $\begin{cases} 3x-1>11, \\ 4x-2\geq 18. \end{cases}$

Решение первого неравенства $x > 4$, второго неравенства – $x \geq 5$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой. Решение первого неравенства помечено штриховкой сверху, второго неравенства – штриховкой снизу. Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств, т. е. промежуток, на котором обе штриховки совпали. В итоге получаем луч $[5; +\infty)$.

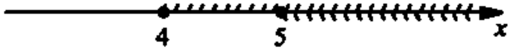



**Определение 4.** Несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если необходимо найти все такие значения переменной, каждое из которых является частным решением **хотя бы одного** из данных неравенств. Каждое такое значение переменной называют **частным решением совокупности неравенств**. Множество всех частных решений совокупности неравенств представляет собой **решение совокупности неравенств. Решение совокупности неравенств** представляет собой **объединение решений** всех неравенств. Неравенства, образующие совокупность, объединяются **квадратной скобкой**.

***Пример 11***

Решим совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 3x-1>11, \\ 4x-2\geq 18. \end{array}\right.$

Решение первого неравенства $x > 4$, второго неравенства – $x \geq 5$. Эти промежутки (аналогично предыдущему примеру) отмечены на одной координатной прямой. Решением данной совокупности неравенств будет объединение решений неравенств совокупности. В итоге получаем луч $(4; +\infty)$, т. е. промежуток, на котором имеется хотя бы одна штриховка.




**Если в системе из нескольких неравенств одно является следствием другого** (или других), то **неравенство-следствие не учитывают.**

***Пример 12***

Решим неравенство $\log_2(x^2-13x+42)\geq 1$.

ОДЗ неравенства задается условием $x^2 - 13x + 42 > 0$. Запишем число 1 в виде $1 = \log_2 2$ и получим неравенство $\log_2(x^2-13x+42)\geq\log_2 2$. Так как основание логарифмов 2 больше 1, то приходим к неравенству $x^2 - 13x + 42 \geq 2$. Таким образом, данное логарифмическое неравенство сводится к системе квадратных неравенств: $\begin{cases}x^2-13x+42>0,\\ x^2-13x+42\geq 2.\end{cases}$ Очевидно, если выполнено второе неравенство, то тем более выполняется первое неравенство. Поэтому первое неравенство – следствие второго, и его можно отбросить. Второе неравенство запишем в виде $x^2 - 13x + 40 \geq 0$ и решим его: $x\in(-\infty;\,5]\cup[8;\,+\infty)$.

Особенно внимательным необходимо быть при решении логарифмических неравенств, в которых в основания логарифмов входит переменная.

***Пример 13***

Решим неравенство $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

Запишем неравенство в виде $\log_{2x}(x^2-5x+6)<\log_{2x}(2x)$ и рассмотрим два случая.

а) Если $2x > 1$, то по теореме 6 получаем систему неравенств: $\begin{cases}2x>1,\\ x^2-5x+6>0,\\ x^2-5x+6<2x.\end{cases}$ Решим неравенства системы: $\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ x<2 \text{ и } x>3,\\ 1<x<6.\end{cases}$ Получаем решение системы: $x\in(1;\,2)\cup(3;\,6)$.

б) Если $0 < 2x < 1$, то по теореме 6 имеем систему неравенств: $\begin{cases}0<2x<1,\\ x^2-5x+6>0,\\ x^2-5x+6>2x.\end{cases}$ Очевидно, если выполнены первое и третье неравенства, то будет выполнено и второе неравенство (поэтому его отбросим). Получаем систему неравенств: $\begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x. \end{cases}$ Решим

неравенства системы: $\begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x < 1 \text{ и } x > 6. \end{cases}$ Получаем решение системы

$x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Учитывая совокупность двух систем неравенств *а*, *б*, найдем решение данного логарифмического неравенства: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$.

Заметим, что при решении неравенств вида $\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x)$ можно обойтись и **одной системой** неравенств (вместо совокупности систем неравенств). Действительно, данное логарифмическое неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) < 0. \end{cases}$

Первые три неравенства очевидны и задают ОДЗ данного неравенства. Последнее неравенство при $a(x) > 1$ переходит в неравенство $f(x) - g(x) < 0$ (или $f(x) < g(x)$), при $a(x) < 1$ – в неравенство $f(x) - g(x) > 0$ (или $f(x) > g(x)$), что полностью согласуется с теоремами 2, 6.

Применительно к примеру 13 получаем систему неравенств:
$$\begin{cases} 2x > 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ (2x - 1)(x^2 - 5x + 6 - 2x) < 0. \end{cases}$$

Решим неравенства системы: $\begin{cases} x > 0, \\ x < 2 \text{ и } x > 3, \\ x < \dfrac{1}{2} \text{ и } 1 < x < 6. \end{cases}$ Тогда решение

системы: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$.

### 3. Иррациональные неравенства

Ранее мы рассматривали простейшие иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} \vee \sqrt{g(x)}$. Теперь обсудим более сложное неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

ОДЗ неравенства задается условием $f(x) \geq 0$. Так как левая часть неотрицательна, то правая часть должна быть положительной, т. е. $g(x) > 0$. Обе части данного неравенства неотрицательны. Поэтому по теореме 4 возведем обе части в квадрат (при этом знак неравенства сохраняется): $f(x) < g^2(x)$. Таким образом, данное иррациональное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$

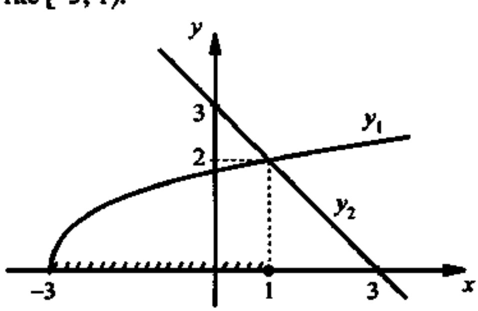
***Пример 14***

Решим неравенство $\sqrt{x+3} < 3 - x$.

Это неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ 3-x > 0, \\ x+3 < (3-x)^2. \end{cases}$

Решим неравенства системы: $\begin{cases} x \geq -3, \\ x < 3, \\ x < 1 \text{ и } x > 6. \end{cases}$ Тогда решение системы: $x \in [-3; 1)$.

Заметим, что нетрудно дать графическую иллюстрацию решения. Построим графики функций $y_1 = \sqrt{x+3}$ и $y_2 = 3 - x$. Видно, что графики функций пересекаются в точке (1; 2) и неравенство выполняется на промежутке [–3; 1).



Также обсудим решение неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$. ОДЗ неравенства задается условием $f(x) \geq 0$. Правая часть $g(x)$ неравенства может быть и отрицательной, и неотрицательной. Поэтому возникают два случая.

а) Если $g(x) < 0$, то неравенство выполнено, т. к. $\sqrt{f(x)} \geq 0$. Имеем систему неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

б) Если $g(x) \geq 0$, то по теореме 4 можем возвести в квадрат обе части неравенства: $f(x) > g^2(x)$. Имеем систему неравенств: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$

Очевидно, что если выполнено третье неравенство, то будет выполнено и первое неравенство (его можно отбросить). Тогда получим систему неравенств: $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$

Таким образом, данное иррациональное неравенство равносильно совокупности систем неравенств: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$

***Пример 15***

Решим неравенство $\sqrt{3-x} > x-1$.

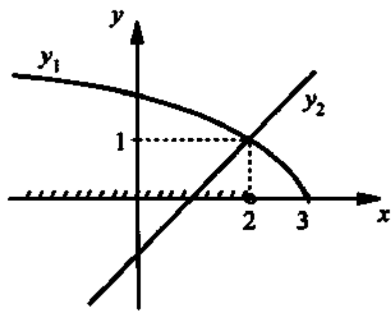
Учитывая ранее изложенное, получаем совокупность систем неравенств:

а) $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x-1 < 0. \end{cases}$ Решим неравенства системы: $\begin{cases} x \leq 3, \\ x < 1. \end{cases}$ Тогда решение системы $x < 1$.

б) $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 3-x > (x-1)^2. \end{cases}$ Решим неравенства системы: $\begin{cases} x \geq 1, \\ -1 < x < 2. \end{cases}$ Тогда решение системы $1 \leq x < 2$.

Учитывая системы *а – б*, получаем решение данного иррационального уравнения $x \in (-\infty; 2)$.

Дадим графическую иллюстрацию решения. Построим графики функций $y_1 = \sqrt{3-x}$ и $y_2 = x - 1$. Графики пересекаются в точке (2; 1), и неравенство выполняется на промежутке $(-\infty; 2)$.



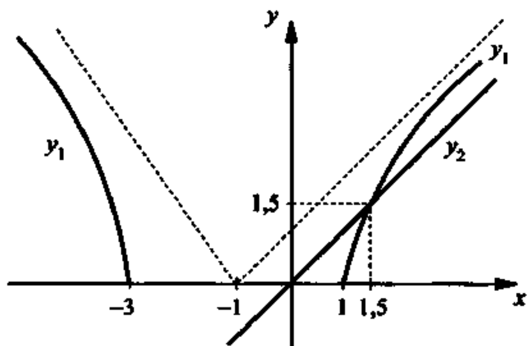

Разумеется, рассмотренный подход можно использовать и при решении более сложных задач.

***Пример 16***

Решим неравенство $\sqrt{x^2+2x-3}<x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} x^2+2x-3\ge 0, \\ x>0, \\ x^2+2x-3<x^2. \end{cases}$ Решим неравенства системы: $\begin{cases} x\le -3 \text{ и } x\ge 1, \\ x>0, \\ x<1{,}5. \end{cases}$ Тогда решение системы (и данного неравенства) $x\in[1;\,1{,}5)$.

Приведем графическую иллюстрацию решения. Построим графики функций $y_1=\sqrt{x^2+2x-3}$ и $y_2 = x$. Область определения функции $y_1(x)$: $x\in(-\infty;\,-3]\cup[1;\,+\infty)$. В подкоренном выражении выделим полный квадрат: $y_1=\sqrt{(x+1)^2-4}$. Тогда при $x\to\pm\infty$ $y_1 = |x+1|$. Графики функций пересекаются в точке (1,5; 1,5), и неравенство выполняется на промежутке [1; 1,5).



### 4. Неравенства с модулями

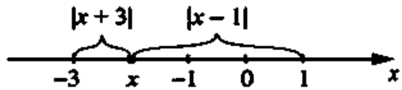
Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, очень распространены и решаются различными способами. Рассмотрим на примере эти способы.

***Пример 17***

Решим неравенство $|x-1| \geq |x+3|$.

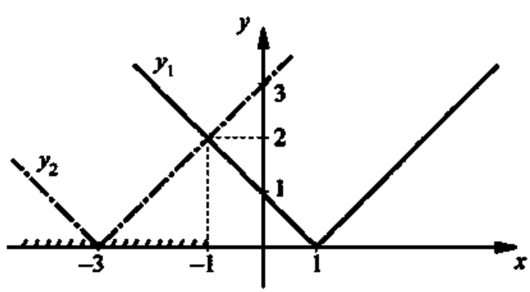
**Первый способ** (геометрический смысл модуля).

Запишем неравенство в виде $|x-1| \geq |x-(-3)|$. Геометрический смысл выражения $|x-1|$ – расстояние на координатной оси точки $x$ до точки 1, выражения $|x-(-3)|$ – расстояние от точки $x$ до точки (–3). По условию задачи первое расстояние должно быть не меньше второго. Середина отрезка [–3; 1] – точка (–1). Если $x = -1$, то расстояния $|x-1|$ и $|x+3|$ равны. Если $x \leq -1$, то условие задачи выполняется. Поэтому промежуток $(-\infty; -1]$ – решение данного неравенства.




**Второй способ** (графическое решение).

Построим графики функций $y_1 = |x-1|$ и $y_2 = |x+3|$. Они получаются смещением графика $y = |x|$ на одну единицу вправо и на три единицы влево соответственно. Эти графики пересекаются в точке (–1; 2). Видно, что данное неравенство выполняется на промежутке $x \in (-\infty\ -1]$.

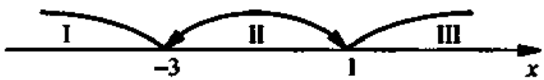



**Третий способ** (возведение в квадрат).

Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведем их в квадрат и учтем равенство $|a|^2 = a^2$. Получаем: $|x-1|^2 \geq |x+3|^2$ или $(x-1)^2 \geq (x+3)^2$. Перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители, используя формулу разности квадратов. Имеем: $(x-1)^2 - (x+3)^2 \geq 0$, или $(x-1-x-3)(x-1+x+3) \geq 0$, или $-4(2x+2) \geq 0$. Разделим обе части неравенства на отрицательное число (–8) и изменим знак неравенства на противоположный. Получим $x + 1 \le 0$, откуда $x \le -1$.

**Четвертый способ** (определение модуля).

Выражение $x - 1$ меняет знак в точке $x = 1$, выражение $x + 3$ – в точке $x = -3$. Нанесем эти точки на координатную ось. Они разбивают ось на три интервала. Раскроем знаки модуля для каждого промежутка.




В промежутке I ($x \le -3$) запишем данное неравенство: $-(x - 1) \ge -(x + 3)$ или $1 \ge -3$. Так как получили верное числовое неравенство, то все точки промежутка I – решение исходного неравенства.

В промежутке II ($-3 < x < 1$) данное неравенство имеет вид: $-(x - 1) \ge x + 3$ или $-2 \ge 2x$, откуда $x \le -1$. Тогда точки $(-3; -1]$ этого промежутка – решение исходного неравенства.

В промежутке III ($x \ge 1$) запишем данное неравенство: $x - 1 \ge x + 3$ или $-1 \ge 3$. Получили неверное числовое неравенство. Это означает, что ни одна точка этого промежутка не является решением исходного неравенства.

Учитывая результаты в промежутках I – III, получаем окончательный ответ: $(-\infty; -1]$.

Заметим, что наиболее **универсальным** способом решения неравенств является четвертый способ – использование определения модуля. Но, разумеется, в зависимости от ситуации применяются и остальные три способа.

***Пример 18***

Решим неравенство $|x^2 - 3| - 2x \le 0$.

Запишем неравенство в виде $|x^2 - 3| \le 2x$. Так как левая часть неотрицательна, то и правая часть неравенства должна быть неотрицательной, т. е. $2x \ge 0$ (тогда $x \ge 0$). Используем третий способ и возведем по теореме 4 обе неотрицательные части неравенства в квадрат. Получаем: $|x^2 - 3| \le 2x$, или $(x^2 - 3)^2 - (2x)^2 \le 0$, или $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x - 3) \le 0$, или $(x + 1)(x - 3)(x - 1)(x + 3) \le 0$. Решим это неравенство методом интервалов и найдем: $x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$. Учтем условие $x \ge 0$ и запишем решение данного неравенства $x \in [1; 3]$.

***Пример 19***

Решим неравенство $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \ge 2.$

Разложим знаменатель дроби на множители: $\dfrac{|x-3|}{(x-2)(x-3)} \ge 2.$ Используя определение модуля (четвертый способ), рассмотрим два случая.

а) Если $x < 3$, то неравенство имеет вид: $\dfrac{-(x-3)}{(x-2)(x-3)} \ge 2$, или $\dfrac{1}{2-x} \ge 2$, или $\dfrac{1}{2-x} - 2 \ge 0$, или $\dfrac{2x-3}{2-x} \ge 0$. Решение этого неравенства: $x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right)$. Это решение расположено в рассматриваемом промежутке $x < 3$.

б) Если $x > 3$, то неравенство имеет вид: $\dfrac{x-3}{(x-2)(x-3)} \ge 2$, или $\dfrac{1}{x-2} \ge 2$, или $0 \ge 2 - \dfrac{1}{x-2}$, или $0 \ge \dfrac{2x-5}{x-2}$. Решение этого неравенства $x \in \left(2; \dfrac{5}{2}\right]$ не лежит в рассматриваемом промежутке $x > 3$ и на самом деле решением не является.

Итак, решение данного неравенства: $x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Понятие равносильных неравенств.
2. Понятие неравенства-следствия.
3. Теоремы о равносильности неравенств (фронтальный опрос).
4. Система неравенств и ее решение.
5. Совокупность неравенств и ее решение.
6. Решение иррациональных неравенств вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt{f(x)} > g(x)$.
7. Способы решения неравенств с модулями.

**V. Задание на уроках**

§ 57, № 2 (а, в); 3 (а, б); 4 (б); 7 (а); 8 (б); 9 (а); 11 (б); 13 (а); 14 (б); 17 (а); 20 (б); 22 (а); 23 (а, б); 24 (в, г); 25 (а, б); 26; 28; 30 (а, б); 32 (а).

**VI. Задание на дом**

§ 57, № 2 (б, г); 3 (в, г); 4 (а); 7 (б); 8 (а); 9 (б); 11 (а); 13 (б); 14 (а); 17 (б); 20 (а); 22 (б); 23 (в, г); 24 (а, б); 25 (в, г); 27; 29; 30 (в, г); 32 (б).

**VII. Подведение итогов уроков**

## Уроки 72–74. Уравнения и неравенства с двумя переменными

***Цель***: рассмотреть решение уравнений с целочисленными переменными и графическое решение неравенств с двумя переменными.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

**Вариант 1**

1. Теорема о равносильности показательного неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

2. Решение иррационального неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

3. Решите неравенство:

а) $\log_2^2(x-3) - 4\log_2(x-3) + 3 \le 0$;

б) $3^x > 5 - 2x$;

в) $|x+1| + |x-5| \le 10$.

**Вариант 2**

1. Теорема о равносильности показательного неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

2. Решение иррационального неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

3. Решите неравенство:

а) $\log_3^2(x-2) - 5\log_3(x-2) + 6 \le 0$;

б) $2^x > 5 - 3x$;

в) $|x-3| + |x+5| \le 12$.

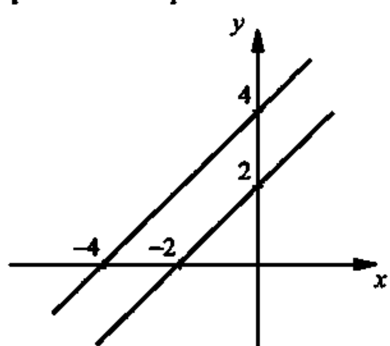
### III. Изучение нового материала

**Решением уравнения с двумя переменными $p(x; y) = 0$** называют такую пару чисел $(x; y)$, которая обращает уравнение в верное числовое равенство.

***Пример 1***

а) Уравнение $|3x+y-5|+\sqrt[8]{2x+3y-8}=0$ имеет единственное решение – пару (1; 2), т. к. сумма двух неотрицательных величин $|3x+y-5|$ и $\sqrt[8]{2x+3y-8}$ равна нулю, если каждое из этих слагаемых равно нулю. Получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases}3x+7-5=0,\\2x+3y-8=0,\end{cases}$ которая имеет единственное решение (1; 2).

б) Уравнение $|y - x - 3| = 1$ имеет бесконечное множество решений. Очевидно, что данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}y-x-3=1,\\y-x-3=-1\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}y=x+4,\\y=x+2.\end{array}\right.$ Обычно принято **решения изображать графически** на координатной плоскости. В нашем случае решения уравнения представляют собой множество точек, расположенных на двух параллельных прямых.




в) Уравнение $x^2+\sqrt{y-1}=-3$ не имеет решений, т. к. сумма двух неотрицательных величин $x^2$ и $\sqrt{y-1}$ не может равняться отрицательному числу (–3).

В случае целого рационального **уравнения с целочисленными коэффициентами и несколькими переменными** (диофантово уравнение) часто возникает задача поиска **целочисленных решений.** Несмотря на двухтысячелетнюю историю подобных задач, до сих пор не существует алгоритма их решения в общем случае (например, знаменитая теорема Ферма). Иногда такие задачи решаются с помощью теории делимости целых чисел.

***Пример 2***

Найдем целочисленные решения уравнения $y^2+3xy-4x^2=6$.

Учтем, что в левой части уравнения стоит **однородный** многочлен второй степени с переменными $x$ и $y$. Найдем его корни (считая $y$ неизвестной, а $x$ – постоянной величинами): $y=\dfrac{-3x\pm\sqrt{9x^2+16x^2}}{2}=$ $=\dfrac{-3x\pm 5x}{2}$ (т. е. $y_1=x$ и $y_2=4x$) – и разложим на множители: $y^2+3xy-4x^2=(y-x)(y+4x)$. Получаем уравнение $(y-x)(y+4x)=6$.

Очевидно, если $x$ и $y$ – целые числа, то $y-x$ и $y+4x$, также целые числа, которые являются делителями правой части (числа 6). Поэтому возникает совокупность систем уравнений:

а) $\begin{cases} y-x=1, \\ y+4x=6 \end{cases}$ (решение $x=1$; $y=2$);

б) $\begin{cases} y-x=2, \\ y+4x=3 \end{cases}$ (решение $x=0{,}2$; $y=2{,}2$ не является целочисленным);

в) $\begin{cases} y-x=3, \\ y+4x=2 \end{cases}$ (решение $x=-0{,}2$; $y=2{,}8$ не является целочисленным);

г) $\begin{cases} y-x=6, \\ y+4x=1 \end{cases}$ (решение $x=-1$; $y=5$);

д) $\begin{cases} y-x=-1, \\ y+4x=-6 \end{cases}$ (решение $x=-1$; $y=-2$);

е) $\begin{cases} y-x=-2, \\ y+4x=-3 \end{cases}$ (решение $x=-0{,}2$; $y=2{,}2$ не является целочисленным);

ж) $\begin{cases} y-x=-3, \\ y+4x=-2 \end{cases}$ (решение $x=0{,}2$; $y=-2{,}8$ не является целочисленным);

з) $\begin{cases} y-x=-6, \\ y+4x=-1 \end{cases}$ (решение $x=1$; $y=-5$).

Таким образом, данное уравнение имеет четыре целочисленных решения: (1; 2), (–1; 5), (–1; –2), (1; –5). Заметим, что можно было рассмотреть только четыре системы уравнений. Очевидно, если $(x_0; y_0)$ – решение данного уравнения, то пара с противоположными знаками переменных $(-x_0; -y_0)$ – также решение этого уравнения. Поэтому, рассмотрев системы *а – г*, можно сразу записать решения систем *д – з*.

***Пример 3***

Найдем целочисленные решения уравнения $xy + x - 2y = 5$.

Можно предложить два способа решения этой задачи.

**Первый способ.** Аналогично предыдущей задаче попробуем разложить левую часть уравнения на множители: $(xy+x)-2y=5$, или $x(y+1)-2y-2=5-2$, или $x(y+1)-2(y+1)=3$, или $(x-2)(y+1)=3$. Так как $x$ и $y$ – целые числа, то и числа $x-2$ и $y+1$ целые и являются делителями числа 3. Получаем совокупность четырех систем уравнений:

а) $\begin{cases} x-2=1, \\ y+1=3 \end{cases}$ (решение: $x=3$; $y=2$);

б) $\begin{cases} x-2=3, \\ y+1=1 \end{cases}$ (решение: $x=5$; $y=0$);

в) $\begin{cases} x-2=-1, \\ y+1=-3 \end{cases}$ (решение: $x=1$; $y=-4$);

г) $\begin{cases} x-2=-3, \\ y+1=-1 \end{cases}$ (решение: $x=-1$; $y=-2$).

Итак, данное уравнение имеет четыре целочисленных решения: (3; 2), (5; 0), (1; –4), (–1; –2).

**Второй способ.** Из исходного уравнения $xy+x-2y=5$ выразим, например, переменную $y$: $(x-2)y=5-x$ или $y=\dfrac{5-x}{x-2}$. Выделим в этом выражении целую часть: $y=\dfrac{(-x+2)+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+3}{x-2}=-1+\dfrac{3}{x-2}$. Выражение для $y$ является суммой двух слагаемых, одно из которых (–1) – целое число. Чтобы величина $y$ была целым числом, надо чтобы дробь $\dfrac{3}{x-2}$ была целым числом. Для этого необходимо, чтобы величина $x-2$ была делителем числа 3. Получаем четыре случая:

а) $x-2=1$, тогда $x=3$ и $y=2$;

б) $x-2=3$, тогда $x=5$ и $y=0$;

в) $x-2=-1$, тогда $x=1$ и $y=-4$;

г) $x-2=-3$, тогда $x=-1$ и $y=-2$.

Разумеется, получили те же самые целочисленные решения данного уравнения.

*Пример 4*

Найдем целочисленные решения уравнения $x^3-x=6y+1$.

Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение в виде: $(x-1)x(x+1)=6y+1$. Так как $x$ – целое число, то числа $x-1$, $x$, $x+1$ – три последовательных целых числа. Среди них обязательно одно кратно 3 и по крайней мере одно четное. Следовательно, произведение $(x-1)x(x+1)$ делится без остатка на 6. В правой части уравнения стоит число, которое при делении на 6 дает остаток 1 (т. к. $y$ – целое число). Следовательно, данное уравнение целочисленных решений не имеет.

*Пример 5*

Найдем целочисленные решения уравнения $3x+8y=68$.

Выразим из данного уравнения переменную $x=\frac{68-8y}{3}$. Так как эта дробь должна быть целым числом, то выражение $68-8y$ должно без остатка делиться на 3. Для целого числа $y$ по отношению к делимости на 3 существуют три возможности:

а) число $y$ делится на 3, т. е. $y=3k$ (где $k\in Z$). Тогда $x=\frac{68-24k}{3}=22\frac{2}{3}-8k$ является дробью;

б) число $y$ при делении на 3 дает остаток 1, т. е. $y=3k+1$. Тогда $x=\frac{68-8(3k+1)}{3}=\frac{60-24k}{3}=20-8k$ – целое число;

в) число $y$ при делении на 3 дает остаток 2, т. е. $y=3k+2$. Тогда $x=\frac{68-8(3k+2)}{3}=\frac{52-24k}{3}=17\frac{1}{3}-8k$ является дробью.

Таким образом, целочисленные решения данного уравнения: $x=20-8k$, $y=3k+1$, где $k\in Z$.

Для наглядности для нескольких значений $k$ приведены целочисленные решения уравнения $(x; y)$.

| $k$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 44 | 36 | 28 | 20 | 12 | 4 | –4 |
| $y$ | –8 | –5 | –2 | 1 | 4 | 7 | 10 |

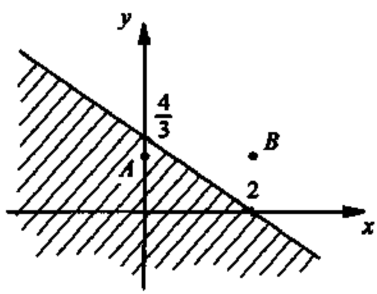
Заметим, что последние четыре задачи, несмотря на одинаковую формулировку условия, решались разными способами. Вообще, задачи, связанные с делимостью чисел (в частности, диофантовы уравнения), считаются в алгебре достаточно **сложными**.

Обратимся теперь к **решению неравенств** вида $p(x, y) \vee 0$, где $p(x; y)$ – алгебраическое выражение с двумя переменными $x$ и $y$. **Решением неравенства** $p(x, y) \vee 0$ называют такую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет данному неравенству (т. е. обращает его в верное числовое неравенство). Обычно решение подобных неравенств изображают на координатной плоскости. При этом используют график уравнения $p(x; y) = 0$.

***Пример 6***

Решим неравенство $2x + 3y - 4 \le 0$.

Сначала построим график уравнения $2x + 3y - 4 = 0$ (или $y = \frac{4-2x}{3}$). Им является прямая, которая разбивает точки координатной плоскости на две категории: расположенные или ниже прямой, или выше ее. Чтобы выбрать нужные точки, возьмем любую контрольную точку, подставим ее координаты в данное неравенство и проверим его выполнение. Если получится верное неравенство, то требуемая область точек выбрана верно, если нет – то неверно.




Например, для контрольной точки $A(0; 1)$ получаем верное числовое неравенство: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 4 \le 0$ или $-1 \le 0$. Тогда подходят точки, расположенные там же, где и точка $A$, т. е. ниже построенной прямой. Для наглядности проверим точки, расположенные выше прямой. Например, для точки $B(2; 1)$ получаем неверное числовое неравенство: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 4 \le 0$ или $3 \le 0$. Значит, аналогичные точки не удовлетворяют данному неравенству.

Фактически был использован **метод интервалов** (только на координатной плоскости, а не на координатной прямой). Действительно, знак выражения $p(x; y)$ меняется на линии, которая задается уравнением $p(x; y) = 0$. Эта линия разбивает все точки координатной плоскости на те, которые удовлетворяют данному неравенству, и те, которые не удовлетворяют.

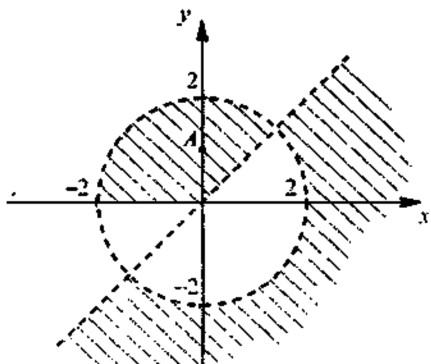
Итак, решением неравенства $2x + 3y - 4 \le 0$ является множество точек, расположенных ниже и на прямой с уравнением $2x + 3y - 4 = 0$ (эта полуплоскость заштрихована).

Подобным образом поступают и в более сложных случаях.

***Пример 7***

Решим неравенство $(x^2 + y^2 - 4)(y - x) < 0$.

Сначала построим график уравнения $(x^2 + y^2 - 4)(y - x) = 0$. Так как произведение множителей равно нулю, то или первый равняется нулю, или второй. Получаем более простые уравнения: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ (или $x^2 + y^2 = 2^2$) – окружность радиуса 2 с центром в начале координат и $y - x = 0$ (или $y = x$) – прямая, проходящая через начало координат. Построим пунктиром эти линии (т. к. неравенство строгое, то границы решением неравенства не являются).

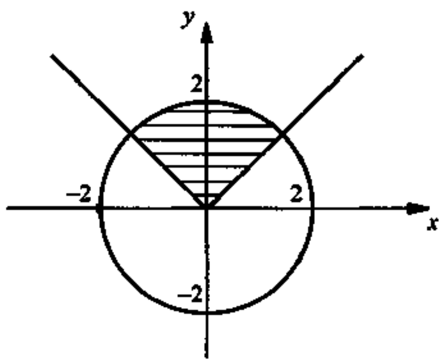



Возьмем контрольную точку $A(0; 1)$ и проверим выполнение данного неравенства. Получаем верное числовое неравенство: $(0^2 + 1 - 4)(1 - 0) < 0$ или $-3 < 0$. Знак исходного выражения меняется или на окружности $x^2 + y^2 = 2^2$, или на прямой $y = x$. Теперь легко заштриховать множество точек, удовлетворяющих данному неравенству.

Также можно рассматривать и решение системы неравенств с двумя переменными. **Решением системы неравенств с двумя переменными** считают множество таких точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют **всем** неравенствам системы. Этим множеством является **пересечение** решений неравенств системы.

***Пример 8***

**Решим систему неравенств** $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4, \\ y \ge |x|. \end{cases}$




**Используя контрольные точки, легко проверить, что решением неравенства $x^2 + y^2 \le 4$ являются точки, расположенные внутри и на границе окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Решением неравенства $y \ge |x|$ являются точки, расположенные выше и на графике зависимости $y = |x|$. Пересечение множеств решений неравенств системы дает круговой сектор (он заштрихован).**

**IV. Контрольные вопросы**

1. Решение уравнения с двумя переменными.

2. Понятие о диофантовых уравнениях.

3. Решение неравенства с двумя переменными и его представление на координатной плоскости.

4. Решение системы неравенств с двумя переменными и его изображение на координатной плоскости.

**V. Задание на уроках**

§ 58. № 1 (а, б); 3 (б); 5 (г); 6 (а, в); 9 (в, г); 10 (а); 12 (б); 13 (а); 15 (в); 17 (а); 19 (в); 20 (а, в); 22 (б); 23 (а); 24 (а, в).

**VI. Задание на дом**

§ 58, № 1 (в, г); 3 (г); 5 (б); 6 (б, г); 9 (а, б); 10 (б); 12 (а); 13 (б); 15 (г); 17 (б); 19 (г); 20 (б, г); 22 (а); 23 (б); 24 (б, г).

**VII. Подведение итогов уроков**

# Уроки 75–76. Системы уравнений

***Цель:*** рассмотреть некоторые новые способы решения систем уравнений.

## Ход уроков

### I. Сообщение темы и цели уроков

### II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

1. Постройте график уравнения $(y - 2x)(x + 2) = 0$.

2. Постройте множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $3|x| + 2|y| \le 6$, и найдите площадь этой фигуры.

3. Решите уравнение $2xy + 4x - y = 4$ в целых числах.

**Вариант 2**

1. Постройте график уравнения $(y + 3x)(x - 2) = 0$.

2. Постройте множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $3|x| + 4|y| \le 12$, и найдите площадь этой фигуры.

3. Решите уравнение $2xy + x - 2y = 4$ в целых числах.

### III. Изучение нового материала

Начиная с 7 класса в курсе алгебры изучались различные системы уравнений с двумя переменными. Для их решения использовались метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, графический метод. На этом уроке мы рассмотрим несколько **необычные применения** таких **методов**, а также **и другие способы решения** систем уравнения. Как обычно, вначале уточним некоторые понятия.

**Определение 1.** Уравнения $p(x; y) = 0$ и $q(x; y) = 0$ образуют **систему уравнений** $\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0, \end{cases}$ если необходимо найти такие пары чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют каждому уравнению. При этом пару значений $(x; y)$ называют **решением системы уравнений**. Решить систему уравнений – значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

По аналогии можно говорить и о системе трех уравнений с тремя переменными: $\begin{cases} p(x; y; z) = 0, \\ q(x; y; z) = 0, \\ r(x; y; z) = 0. \end{cases}$ При этом необходимо найти тройки чисел ($x$; $y$; $z$), удовлетворяющих **всем** уравнениям системы. Также можно говорить о системах уравнений, содержащих любое число уравнений и любое число переменных.

Основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе **от сложного уравнения к более простому**, но **равносильному исходному**. При этом в системе уравнений, как правило, стремятся **получить** хотя бы одно **линейное уравнение**. Если происходит **переход к уравнению-следствию**, то обязательна **проверка корней**, т. к. возможно появление посторонних решений. То же можно сказать и о системах уравнений.

**Определение 2.** Две системы уравнений называют **равносильными**, если они имеют одни и те же решения или решений не имеют.

Метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных приводят к равносильным преобразованиям системы уравнений. Если в процессе решения используются **неравносильные преобразования** хотя бы одного уравнения (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы, преобразования, приводящие к расширению области определения уравнения, и т. д.), то **необходима проверка решений их подстановкой** в исходную систему.

После предварительных замечаний перейдем к системе уравнений. Обратите внимание на то, что для наиболее рационального решения данной системы всегда **учитывается** ее **специфика** (в каждом примере мы будем специально это оговаривать). Начнем с **систем линейных уравнений**.

***Пример 1***

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x+y+z=1, \\ x+2y+z=3, \\ x+y+2z=4. \end{cases}$

Видно, что каждая переменная входит в систему ровно четыре раза. Поэтому **сложим все три уравнения** и получим: $4x+4y+4z=8$, откуда сумма всех переменных: $x+y+z=2$. В каждом уравнении будем **выделять** это **равенство**. Из первого уравнения системы имеем: $x+(x+y+z)=1$ или $x+2=1$, откуда $x=-1$. Из второго уравнения получаем: $(x+y+z)+y=3$ или $2+y=3$, тогда $y=1$. Из третьего уравнения имеем: $(x+y+z)+z=4$ или $2+z=4$, откуда $z=2$. Итак, система уравнений имеет единственное решение $(-1; 1; 2)$. При этом преобразования (сложение уравнений) были равносильны, и решение в проверке не нуждается.

***Пример 2***

Решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4}, \\ 2x+3y-5z+26=0. \end{cases}$

Обращает на себя внимание непривычность первого уравнения. Используем способ подстановки и обозначим отношения, входящие в первые уравнения буквой $t$ (**новая переменная**): $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=$ $=\dfrac{z-1}{4}=t$. Из этого равенства выразим старые переменные через новую: $x = 2t + 1$; $y = 3t - 3$; $z = 4t + 1$. Подставим эти выражения во второе уравнение системы и получим: $2(2t+1)+3(3t-3)-$ $-5(4t+1)+26=0$ или $-7t + 14 = 0$, откуда $t = 2$. Теперь легко найти основные переменные: $x = 2 \cdot 2 + 1 = 5$; $y = 3 \cdot 2 - 3 = 3$; $z = 4 \cdot 2 + 1 = 9$. Использовался способ подстановки, и решение (5; 3; 9) проверять не надо.

Достаточно часто встречаются ситуации, когда число переменных в системе превосходит число уравнений. Разумеется, найти все переменные невозможно. Однако определенную их комбинацию можно вычислить.

***Пример 3***

Школьник истратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, книг и авторучки. Если бы портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка – в 6 раз дешевле, а книги – в 3 раза дешевле, то покупка стоила бы 700 руб. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка – в 2 раза дороже, а книги – в 1,25 раза дороже, то школьник уплатил бы 2075 руб. Сколько стоит первоначальная покупка? На сколько рублей портфель дороже авторучки?

**Первый этап.** Составление математической модели.

Пусть первоначальная стоимость портфеля $x$ рублей, книг – $y$ руб., авторучки – $z$ руб. По условиям задачи легко записать систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{6}+\dfrac{y}{3}=700, \\ \dfrac{x}{2}+2z+1,25y=2075. \end{cases}$ Сразу удобно избавиться от дробей в системе. Для этого умножим все члены первого уравнения на 6, второго – на 4 и получим: $\begin{cases} 3x+2y+z=4200, \\ 2x+5y+8z=8300. \end{cases}$

**Второй этап.** Работа с составленной моделью.

Мы имеем систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Поэтому однозначно определить все переменные невозможно. Но нас интересуют только две комбинации неизвестных: $a = x + y + z$ (стоимость всей покупки) и $b = x - z$ (на сколько портфель дороже авторучки). Для их нахождения можно использовать два способа.

**Первый способ** (метод подстановки). Из полученной системы можно выразить две неизвестные через третью. Выразим сначала из первого уравнения $z = 4200 - 3x - 2y$ и подставим во второе уравнение. Получаем: $2x + 5y + 8(4200 - 3x - 2y) = 8300$, или $22x + 11y = 25\,300$, или $2x + y = 2300$. Теперь выразим переменную $y = 2300 - 2x$. Подставим эту величину в выражение для $z$: $4200 - 3x - 2y = 4200 - 3x - 2(2300 - 2x) = x - 400$. Получили: $y = 2300 - 2x$ и $z = x - 400$. Наконец найдем величины: $a = x + y + z = x + (2300 - 2x) + (x - 400) = 1900$ и $b = x - z = x - (x - 400) = 400$.

**Второй способ** (метод алгебраического сложения). Внимательно присмотримся к коэффициентам при переменных в полученной системе. Для нахождения величины $a$ надо, чтобы эти коэффициенты в итоговом равенстве стали одинаковыми. Поэтому умножим все члены первого уравнения на 3 и получим систему: $\begin{cases} 9x + 6y + 3z = 12\,600, \\ 2x + 5y + 8z = 8300. \end{cases}$

Сложим уравнения системы: $11x + 11y + 11z = 20\,900$, и тогда $x + y + z = a = 1900$.

Для нахождения величины $b$ необходимо исключить переменную $y$. Поэтому в полученной системе первое уравнение умножим на 5, второе уравнение – на (–2). Имеем систему: $\begin{cases} 15x + 10y + 5z = 2100, \\ -4x - 10y - 16z = -16\,600. \end{cases}$ Сложим уравнения системы: $11x - 11z = 4400$, и тогда $x - z = b = 400$.

**Третий этап.** Ответ на вопрос задачи.

На втором этапе были использованы равносильные преобразования (метод подстановки или метод сложения). Поэтому полученные ответы не нуждаются в проверке. Итак, первоначальная стоимость всей покупки 1900 руб. и портфель дороже авторучки на 400 руб.

Теперь перейдем к **нелинейным системам** уравнений и рассмотрим два очень распространенных вида таких систем: **однородные** системы и **симметричные** системы. Сначала обсудим **однородные системы**.

***Пример 4***

Решим систему уравнений $\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 = 0, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{cases}$

Особенностью системы является то, что первое уравнение – **однородное**. Решим его, считая $y$ неизвестной, а $x$ – постоянной величиной. Получаем: $y = -x \pm \sqrt{x^2 + 3x^2} = -x \pm 2x$, т. е. $y_1 = x$ и $y_2 = -3x$. Таким образом, нашли **линейную связь между переменными** (фактически получили **линейное уравнение**). Далее исходная система сводится к совокупности двух систем уравнений:

а) $\begin{cases} y = x, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{cases}$ Решения этой системы $(1; 1)$, $(-1; -1)$;

б) $\begin{cases} y = -3x, \\ y^2 + 3x^2 = 4. \end{cases}$ Подставляя первое уравнение во второе, получим:

$12x^2 = 4$ или $x^2 = \frac{1}{3}$. Тогда $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ и решения системы $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right)$.

При решении исходной системы все преобразования были равносильными. Поэтому решения проверять не надо. Исходная система имеет четыре решения: $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right)$.

***Пример 5***

Решим систему $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 8. \end{cases}$

В этой системе однородного уравнения нет. Зато левая часть каждого уравнения представляет собой **однородный многочлен** по переменным $x$ и $y$. Поэтому нетрудно получить и **однородное уравнение**. Почленно **разделим первое уравнение на второе** (это можно сделать, т. к. левые части уравнений не равны нулю): $\frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{2x^2 - xy + y^2} = \frac{3}{8}$. Используем свойство пропорции и получим: $8(x^2 + 3xy + 2y^2) = 3(2x^2 - xy + y^2)$ или $2x^2 + 27xy + 13y^2 = 0$ (однородное уравнение). Решая это уравнение, найдем корни: $x_1 = -13y$ и $x_2 = -\frac{y}{2}$. Исходная система сводится к совокупности двух систем уравнений. Причем в качестве второго уравнения систем можно использовать **любое из уравнений исходной системы**. Будем использовать, например, второе уравнение. Получаем:

а) $\begin{cases} x=-13y, \\ 2x^2-xy+y^2=8. \end{cases}$ Подставим первое уравнение во второе:

$2\cdot169y^2+13y^2+y^2=8$ или $352y^2=8$, откуда $y^2=\frac{1}{44}$ и $y=\pm\frac{1}{2\sqrt{11}}$ (тогда $x=\pm\frac{13}{2\sqrt{11}}$). Система имеет решения: $\left(-\frac{13}{2\sqrt{11}};\frac{1}{2\sqrt{11}}\right)$, $\left(\frac{13}{2\sqrt{11}};-\frac{1}{2\sqrt{11}}\right)$;

б) $\begin{cases} x=-\frac{y}{2}, \\ 2x^2-xy+y^2=8. \end{cases}$ Подставим первое уравнение во второе:

$2\cdot\frac{y^2}{4}+\frac{y^2}{2}+y^2=8$ или $y^2=4$ и $y=\pm2$ (тогда $x=\pm1$). Система имеет решения: $(1;-2)$, $(-1;2)$.

Все преобразования были равносильны, и решения исходной системы (которые не проверяем): $\left(-\frac{13}{2\sqrt{11}};\frac{1}{2\sqrt{11}}\right)$, $\left(\frac{13}{2\sqrt{11}};-\frac{1}{2\sqrt{11}}\right)$; $(1;2)$, $(-1;2)$.

Теперь обратимся к **симметричным системам** уравнений. Если каждое уравнение системы не меняется при замене $x$ и $y$ и наоборот, то систему называют **симметричной**. Такие системы решаются заменой $a=x+y$ и $b=xy$ (простейшие симметричные многочлены).

***Пример 6***

Решим систему уравнений $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

Прежде всего убедимся, что эта система симметричная. В каждом уравнении поменяем $x$ и $y$ и наоборот. Получаем систему уравнений $\begin{cases} y+x+yx=7, \\ y^2+x^2+yx=13. \end{cases}$ Видим, что каждое уравнение такой системы совпадает с соответствующим уравнением исходной системы. Следовательно, данная система симметричная.

Введем новые переменные $a=x+y$ и $b=xy$. Учтем, что $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b$, и запишем данную систему в виде: $\begin{cases} a+b=7, \\ a^2-b=13. \end{cases}$ Сложим уравнения системы и получим квадратное уравнение: $a^2 + a - 20 = 0$, корни которого $a_1 = 4$ (соответствующее значение $b_1 = 3$) и $a_2 = -5$ (значение $b_2 = 12$). Вернемся к старым переменным и получим совокупность двух систем уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3. \end{cases}$ Так как первое уравнение линейное, то для решения системы можно использовать метод подстановки. Однако проще применить **обратную теорему Виета**. Будем считать, что $x$ и $y$ – корни некоторого приведенного квадратного уравнения. Так как известны сумма корней и их произведение, то уравнение имеет вид: $t^2 - 4t + 3 = 0$ – и его корни $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$. Мы не знаем, какой из этих корней соответствует $x$, а какой – $y$. Поэтому система имеет два решения: (1; 3) и (3; 1).

Заметим, что это **общее свойство** симметричных систем: если система имеет решение ($c$; $d$), то она обязательно имеет и решение ($d$; $c$);

б) $\begin{cases} x + y = -5, \\ xy = 12. \end{cases}$ Получаем квадратное уравнение $t^2 + 5t + 12 = 0$. Его дискриминант отрицательный, и оно корней не имеет. Поэтому и такая система решений не имеет.

Все преобразования (метод замены переменных, метод алгебраического сложения) были равносильны. Поэтому решения проверять не надо. Итак, исходная система уравнений имеет два решения: (1; 3), (3; 1).

Встречаются (но гораздо реже) симметричные системы трех уравнений с тремя переменными. Для их решения также используют обратную **теорему Виета** для кубического уравнения. Если числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют условиям: $\begin{cases} x + y + z = -a \text{ (сумма всех чисел)}, \\ xy + yz + xz = b \text{ (сумма всех попарных произведений чисел)}, \\ xyz = -c \text{ (произведение всех чисел)}, \end{cases}$

то $x$, $y$, $z$ – корни приведенного кубического уравнения $t^3 + at^2 + bt + c = 0$.

***Пример 7***

Решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} = 1, \\ \dfrac{1}{xyz} = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

**Даже по внешнему виду ясно, что данная система симметричная. В первых двух уравнениях в левых частях приведем дроби к общему знаменателю:** $\begin{cases} \dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=\dfrac{11}{6}, \\ \dfrac{z+x+y}{xyz}=1, \\ \dfrac{1}{xyz}=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$ **Из последнего уравнения имеем:** $xyz = 6$. **Тогда систему запишем (переставив первое и второе уравнения) в виде** $\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+yz+xz=11, \\ xyz=6. \end{cases}$ **По обратной теореме Виета числа** $x$, $y$, $z$ **– корни кубического уравнения** $t^3 - 6t + 11t - 6 = 0$, **которые равны:** $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$. **Поэтому исходная система уравнений имеет шесть решений:** (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1) – число перестановок из трех элементов $P_3 = 3! = 6$.

Достаточно часто удобно **уравнение** свести **к системе уравнений**.

***Пример 8***

Решим уравнение $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

Введем новые переменные $a=\sqrt[3]{x-1}$ и $b=\sqrt[3]{x-2}$, тогда $a^3 = x - 1$ и $b^3 = x - 2$. Первое уравнение системы имеет вид $a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3}$. Для получения второго уравнения найдем разность: $a^3-b^3=(x-1)-(x-2)=1$. Таким образом, пришли к системе $\begin{cases} a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3}, \\ a^3-b^3=1. \end{cases}$ Для нахождения $x$ достаточно определить любую из переменных $a$ и $b$ (тогда $x = a^3 + 1$ или $x = b^3 + 2$).

Возведем первое уравнение в куб. Это равносильное преобразование, т. к. уравнение возводится в нечетную степень. Получаем систему: $\begin{cases} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3, \\ a^3-b^3=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} ab(a+b)=0, \\ a^3-b^3=1. \end{cases}$ Из первого уравнения следуют три случая: $a = 0$ (тогда $x = 1$), или $b = 0$ (тогда $x = 2$), или $a = -b$. В последнем случае, подставив во второе уравнение, получим: $-b^3-b^3=1$, откуда $b^3=-\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$. Итак, данное уравнение имеет три корня: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=\frac{3}{2}$.

Во многих случаях при решении систем уравнений определяющую роль играют удачные преобразования уравнений.

***Пример 9***

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y=-13, \\ (x-2)^2-2(y+3)^2=2x+y-1. \end{cases}$

В первом уравнении системы выделим **полные квадраты** по переменным $x$ и $y$: $(x^2-4x)+(y^2+6y)=-13$, или $(x^2-4x+4)+$ $+(y^2+6y+9)-13=-13$, или $(x-2)^2+(y+3)^2=0$. Очевидно, что такое равенство выполняется только в единственном случае: $x=2$, $y=-3$. Легко проверить, что эти значения переменных удовлетворяют и второму уравнению. Таким образом, данная система уравнений имеет единственное решение (2; –3).

***Пример 10***

Решим систему уравнений $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$

Для решения этой системы чрезвычайно важны **коэффициенты при переменных**. Сначала умножим все члены второго уравнения на 2. Получаем систему уравнений: $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 6x^2-4y^2+10xy-34x-12y+40=0. \end{cases}$

Сначала сложим, затем вычтем уравнения системы. Получаем: $\begin{cases} 16x^2+y^2+8xy-72x-18y+81=0, \\ 4x^2+9y^2-12xy-4x+6y+1=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} (16x^2+8xy+y^2)-18(4x+y)+81=0, \\ (4x^2-12xy+9y^2)-2(2x-3y)+1=0, \end{cases}$

или $\begin{cases} (4x+y)^2-18(4x+y)+81=0, \\ (2x-3y)^2-2(2x-3y)+1=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} (4x+y-9)^2=0, \\ (2x-3y-1)^2=0. \end{cases}$ Таким образом, приходим к системе **линейных** уравнений $\begin{cases} 4x+y-9=0, \\ 2x-3y-1=0. \end{cases}$ Такая (и исходная) система имеет единственное решение: (2; 1). При этом выполнялись только равносильные преобразования.

Заметим, что другие способы решения данной системы более сложные и громоздкие.

**IV. Контрольные вопросы**

1. Система уравнений с двумя переменными и ее решение.
2. Система уравнений с тремя переменными и ее решение.
3. Равносильность систем уравнений.
4. Равносильные преобразования систем уравнений.
5. Однородные системы уравнений и их решение.
6. Симметричные системы уравнений и их решение.

**V. Задание на уроках**

§ 59, № 1(а); 2 (б); 3 (в); 4 (а, г); 6 (б); 7 (а); 8 (а, б); 10 (а); 13 (б); 15 (б); 18 (а); 21 (б); 22 (а); 23 (б); 24; 26.

**VI. Задание на дом**

§ 59, № 1 (г); 2 (а); 3 (г); 4 (б, в); 6 (а); 7 (б); 8 (в, г); 10 (б); 13 (а); 15 (а); 18 (б); 21 (а); 22 (б); 23 (а); 25; 27.

**VII. Подведение итогов уроков**

## Уроки 77–78. Уравнения и неравенства с параметрами (факультативное занятие)

***Цель***: обсудить особенности решения задач с параметрами.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Повторение и закрепление пройденного материала**

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

**Вариант 1**

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - y^3 = 2, \\ 11x + 3y^3 = -14; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy - x - y = -1, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 x + \log_6 y^3 = 7, \\ \log_2 x^3 + \log_{\frac{1}{6}} y = 11. \end{cases}$

**Вариант 2**

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^3 = 5, \\ 5x - 2y^3 = -12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y - xy = 7, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_2 y^4 = 13, \\ \log_5 x^4 + \log_{\frac{1}{2}} y = 1. \end{cases}$

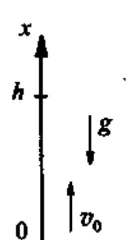
**III. Изучение нового материала**

Задачи с параметрами – одна из самых трудных тем, и встречаются они при изучении каждой темы. Решению подобных задач посвящена многочисленная учебно-методическая литература. Первоначально параметры возникли при описании физических процессов. Рассмотрим простейший пример.

***Пример 1***

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0$. Через какое время $t$ тело окажется на высоте $h$?

Введем ось координат, направленную вертикально вверх. Начало отсчета совместим с поверхностью земли. Начальная скорость $v_0$ направлена по оси $Ox$, ускорение свободного падения – противоположно оси $Ox$. Поэтому $v_0$ имеет положительный знак, $g$ – отрицательный. В момент времени $t$ координата $x$ тела вычисляется по формуле: $x = v_0t - \frac{gt^2}{2}$. Чтобы определить, через какое время тело окажется на высоте $h$, надо решить уравнение $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$. После очевидных преобразований получаем квадратное уравнение: $gt^2 - 2v_0t + 2h = 0$, где $t$ – неизвестная величина; $g$, $v_0$, $h$ – постоянные величины (параметры).



Существование корней и их количество определяются дискриминантом уравнения $D = V_0^2 - 2gh$. Возможны три случая:

а) $D < 0$. Тогда уравнение корней не имеет и тело не сможет оказаться на высоте $h$. То есть кинетической энергии тела $\frac{mv_0^2}{2}$ не хватает, чтобы совершить работу $mgh$ против силы притяжения Земли;

б) $D = 0$. Тогда уравнение имеет единственный корень $t = \frac{v_0}{g}$. Кинетической энергии тела хватает ровно на столько, чтобы подняться на высоту $h$ и тут же упасть на землю;

в) $D > 0$. Тогда уравнение имеет два положительных корня $t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{D}}{g}$. Кинетическая энергия тела значительна. Тело поднимается вверх и в момент времени $t_1$ достигает высоты $h$. Затем поднимается выше и достигает максимальной высоты $H = \frac{v_0^2}{2g}$. После этого тело начинает падать вниз и в момент времени $t_2$ вновь оказывается на высоте $h$.

Таким образом, в зависимости от сочетания параметров $g$, $v_0$ и $h$ получаем различный результат (как в математическом, так и в физическом смысле). В настоящее время задачи с параметрами получили очень широкое распространение и в самой математике. При решении таких задач необходимо привести **ответ для каждого значения параметра.** Принято обозначать **неизвестные последними буквами** латинского алфавита ($x$, $y$, $z$, ...), **параметры – первыми буквами** ($a$, $b$, $c$, ...). Задачи с параметрами решаются теми же приемами, что и аналогичные задачи без параметров. При решении используются **аналитические и графические способы.**

***Пример 2***

Решим неравенство $(a-2)x \geq a^2 - 5a + 6$.

Разложим правую часть на множители и запишем неравенство в виде: $(a-2)x \geq (a-2)(a-3)$. Такое неравенство линейное относительно неизвестной $x$. Чтобы ее найти, необходимо обе части неравенства разделить на коэффициент при $x$. В связи с этим возникают три случая:

а) если $a - 2 < 0$ (т. е. $a < 2$), то при делении знак неравенства меняется на противоположный. Получаем: $x \leq a - 3$ или $x \in (-\infty; a-3]$;

б) если $a - 2 = 0$ (т. е. $a = 2$), то делить, разумеется, нельзя. Тогда подставим значение $a = 2$ в данное неравенство. Получаем: $0 \cdot x \geq 0$ — верное числовое неравенство. Поэтому решением является любое число $x$, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$;

в) если $a - 2 > 0$ (т. е. $a > 2$), то при делении знак неравенства сохраняется. Получаем: $x \geq a - 3$ или $x \in [a-3; +\infty)$.

Учитывая рассмотренные три случая, запишем ответ (его обычно записывают **в порядке возрастания параметра**): при $a \in (-\infty; 2)$: $x \in (-\infty; a-3]$; при $a = 2$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $a \in (2; +\infty)$ $x \in [a-3; +\infty)$.

***Пример 3***

Решим уравнение $\dfrac{1}{x} = \dfrac{a-2}{a+x}$.

ОДЗ этого рационального уравнения задается условиями: $x \neq 0$, $a + x \neq 0$. Используя свойство пропорции, преобразуем уравнение: $a + x = x(a - 1)$ или $a = (a - 2)x$. Получили линейное уравнение относительно неизвестной $x$.

а) Легко проверить, что при $a = 2$ такое уравнение решений не имеет. Действительно, получаем $2 = 0 \cdot x$.

б) При $a \neq 2$ уравнение имеет корень $x = \dfrac{a}{x-2}$. Но может оказаться, что при некоторых значениях $a$ такой корень не входит в ОДЗ уравнения. Проверим это, используя выражение для корня $x = \dfrac{a}{a-2}$.

Так как $x \neq 0$, то получаем условие $\dfrac{a}{a-2} \neq 0$, откуда $a \neq 0$.

Так как $a + x \neq 0$, то возникает условие: $a + \dfrac{a}{a-2} \neq 0$, или $\dfrac{a^2-a}{a-2} \neq 0$, или $\dfrac{a(a-1)}{a-2} \neq 0$, откуда $a \neq 0$ и $a \neq 1$.

Итак, при $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$ уравнение решений не имеет, при остальных значениях $a$ уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{a}{a-2}$.

***Пример 4***

Решим систему уравнений $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = a^2. \end{cases}$

Данная система является линейной. Для решения используем способ подстановки. Из первого уравнения выразим $y = 1 - ax$ и подставим во второе уравнение. Получаем: $x + a(1-ax) = a^2$, или $x(1-a^2) = a^2 - a$, или $x(1-a)(1+a) = a(a-1)$. Это уравнение является линейным.

При $a \neq \pm 1$: $x = \dfrac{a(a-1)}{(1-a)(1+a)} = -\dfrac{a}{a+1}$ и $y = 1 - ax = 1 + \dfrac{a^2}{a+1} =$ $= \dfrac{a^2+a+1}{a+1}$.

Осталось разобраться с решением системы при значениях $a = \pm 1$. В этих случаях для нахождения $x$, разумеется, нельзя делить на коэффициент $(1 - a)(1 + a)$. Поэтому надо подставить такие значения $a$ в линейное уравнение.

При $a = 1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ – и любое число $x$ является его решением. Тогда $y = 1 - ax = 1 - x$ и решение системы $(x;\ 1 - x)$, где $x \in (-\infty; \infty)$. Действительно, при $a = 1$ исходная система принимает вид: $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$ При этом система состоит из двух одинаковых уравнений.

При $a = -1$ линейное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 2$. Очевидно, что такое уравнение (а следовательно, и система) решений не имеет. Действительно, при $a = -1$ исходная система имеет вид $\begin{cases} -x + y = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Умножив первое уравнение на $(-1)$, получаем систему: $\begin{cases} x - y = -1, \\ x - y = 1, \end{cases}$ состоящую из двух противоречащих друг другу уравнений.

Итак, при $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение $\left(-\dfrac{a}{a+1}; \dfrac{a^2+a+1}{a+1}\right)$; при $a = -1$ система решений не имеет; при $a = -1$ система имеет бесконечное множество решений $(x;\ 1 - x)$, где $x \in (-\infty; +\infty)$.

Во многих случаях полезно **сочетать аналитический и графический способы решения**.

***Пример 5***

Решим неравенство $x^2 - 3x(a-1) - 9a \leq 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена: $x=\dfrac{3(a-1)\pm\sqrt{9(a-1)^2+36a}}{2}=$

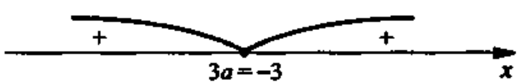
$=\dfrac{3(a-1)\pm\sqrt{9(a+1)^2}}{2}=\dfrac{3(a-1)\pm3(a+1)}{2}$, т. е. $x_1=3a$ и $x_2=-3$. Далее задачу можно решить двумя способами.

**Первый способ** – метод интервалов на координатной прямой.

Так как параметр $a$ принимает все значения, то возможны три случая.

а) $x_1<x_2$, т. е. $3a<-3$ или $a<-1$. Нанесем корни $x_1$ и $x_2$ на координатную ось и построим диаграмму знаков данного выражения. Получаем ответ: $x\in[3a;-3]$.


б) $x_1=x_2$, т. е. $3a=-3$ или $a=-1$. Построим диаграмму выражения для этого случая. Получаем единственное решение $x=-3$.



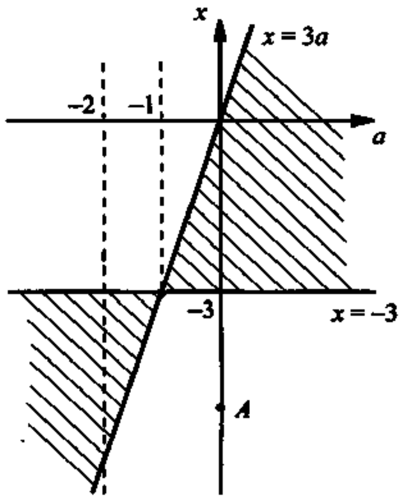

в) $x_1>x_2$, т. е. $3a>-3$ или $a>-1$. Строим диаграмму знаков для этого случая. Получаем ответ: $x\in[-3;3a]$.


Окончательный ответ задачи: при $a\in(-\infty;-1)$ $x\in[3a;-3]$; при $a=-1$ $x=-3$; при $a\in(-1;+\infty)$ $x\in[-3;3a]$.

Недостаток этого способа – необходимость рассмотрения нескольких случаев и построения такого же количества диаграмм знаков. Этот недостаток может быть устранен применением следующего способа.

**Второй способ** – метод интервалов на координатной плоскости.

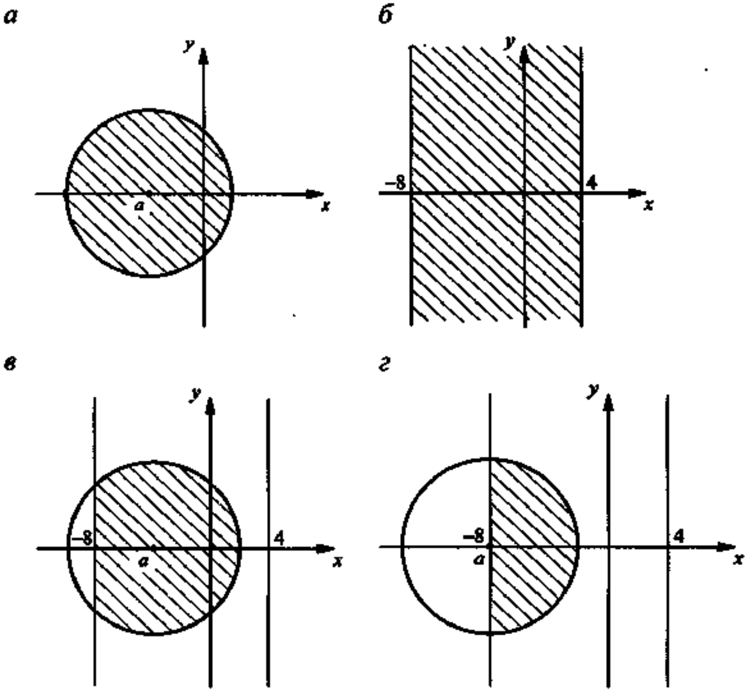
Решим данное неравенство графически. В системе координат $aOx$ построим прямые $x=3a$ и $x=-3$. Изменение знака данного выражения может происходить только на этих прямых. Для контрольной точки $A(0;-5)$ проверяем выполнение исходного неравенства. Получаем: $(-5)^2-3\cdot(-5)(0-1)-9\cdot0\le0$ или $10\le0$ – неверное неравенство. Значит, точка $A$ не является решением неравенства. Теперь легко заштриховать множество точек, удовлетворяющих неравенству. Такая область объединяет в себе все три случая, рассмотренных при первом способе решения. Например, при $a < -1$ (на рисунке построена прямая $a = -2$) видим, что решением неравенства является промежуток $[3a; -3]$.




***Пример 6***

При каких значениях параметра $a$ площадь, фигуры заданной системой неравенств $\begin{cases} y^2 + x^2 - 2ax \le 36 - a^2, \\ (x+2)^2 \le 36, \end{cases}$ равна $18\pi$?

Запишем систему в виде $\begin{cases} (x^2 - 2ax + a^2) + y^2 \le 36, \\ (x+2)^2 - 36 \le 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 \le 6^2, \\ (x-4)(x+8) \le 0. \end{cases}$ Первое неравенство задает круг радиуса 6 с центром в точке $(a; 0)$ (рис. *а*), второе неравенство – полосу $x \in [-8; 4]$ (рис. *б*). Решением данной системы неравенств является пересечение двух построенных множеств точек (рис. *в*). При изменении параметра $a$ круг смещается в горизонтальном направлении. Площадь круга равна $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$. По условию задачи площадь фигуры должна равняться $18\pi$, т. е. составлять половину площади круга. Это возможно в тех случаях, когда центр круга совпадает с одной из границ полосы (рис. *г*), т. е. $a = -8$ и $a = 4$.

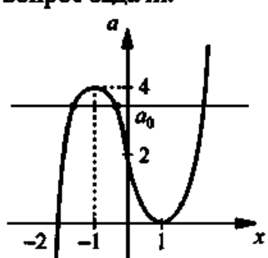



Во многих случаях требуется **не найти** решение, а **исследовать** его. Для подобных ситуаций в основном используется **графический способ**.

***Пример 7***

При всех значениях параметра $a$ определим число корней кубического уравнения $x^3-3x+2-a=0$.

Запишем уравнение в виде $a=x^3-3x+2$. Построим график функции $a(x)$. Точки пересечения этого графика с осью $Ox$: $x_1=-2$ и $x_2=1$. Найдем производную $a'(x)=3x^2-3$. Критические точки функции $x=\pm 1$. В точке $x=-1$ достигается максимум функции $a_{max}=4$ и в точке $x=1$ – минимум $a_{min}=0$. Построим также прямую $a=a_0$. Теперь легко ответить на вопрос задачи.



При $a < 0$ и $a > 4$ графики пересекаются в одной точке (данное уравнение имеет один корень), при $a = 0$ и $a = 4$ – в двух точках (два корня), при $0 < a < 4$ – в трех точках (три корня).

*Ответ*: при $a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ один корень; при $a \in \{0; 4\}$ два корня; при $a \in (0; 4)$ три корня.

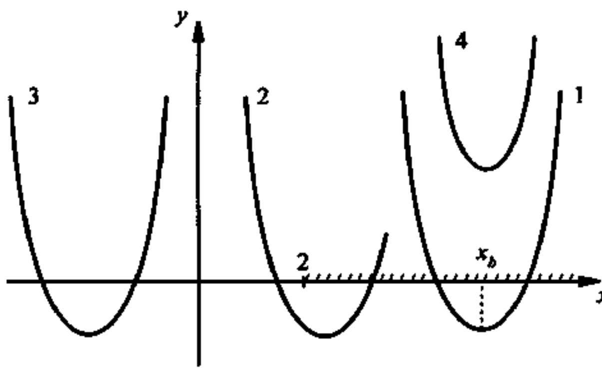
***Пример 8***

При каких значениях параметра $a$ оба корня квадратного уравнения $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ не менее 2?

Рассмотрим два способа решения задачи, основанных на графической модели уравнения.

**Первый способ**

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1$. Ее графиком является парабола, направленная ветвями вверх. Точки ее пересечения с осью $Ox$ должны находиться на промежутке $[2; +\infty)$ (кривая 1).




Также изобразим параболу 2, у которой на промежуток $[2; +\infty)$ попадает только одна точка. Кривые 1 и 2 легко отсортировать: для параболы 1 значение функции при $x = 2$ неотрицательно, т. е. $y(2) \geq 0$ (критерий 1).

Но такому же критерию 1 удовлетворяет кривая 3, у которой обе точки не попадают на промежуток $[2; +\infty)$. Будем сортировать параболы 1 и 3: для кривой 1 абсцисса вершины параболы $x_b$ находится на промежутке $[2; +\infty)$, т. е. $x_b \geq 2$ (критерий 2).

Критериям 1 и 2 удовлетворяет кривая 4, которая вообще не пересекает ось абсцисс. Поэтому приходится вводить еще одно условие: для параболы 1 дискриминант $D \geq 0$ (критерий 3). Будем считать, что при $D = 0$ уравнение имеет два одинаковых корня.

Таким образом, условия задачи приводят к трем неравенствам, образующим систему $\begin{cases} y(2)\ge 0, \\ x_b\ge 2, \\ D\ge 0. \end{cases}$ Запишем эти условия для данного уравнения: $\begin{cases} 2^2-2(a-1)\cdot 2+2a+1\ge 0, \\ a-1\ge 2, \\ (a-1)^2-2a-1\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 9-2a\ge 0, \\ a-1\ge 2, \\ a^2-4a\ge 0. \end{cases}$ Решим неравенства системы: $\begin{cases} a\le 4{,}5, \\ a\ge 3, \\ a\le 0 \text{ и } a\ge 4. \end{cases}$ Тогда решение системы: $a\in[4;\ 4{,}5]$.

Итак, при $a\in[4;\ 4{,}5]$ оба корня данного уравнения не меньше 2.

**Второй способ**

Данное уравнение является квадратным относительно переменных $x$, но линейным – относительно переменной $a$. Выразим из него величину $a$. Получаем: $x^2-2ax+2x+2a+1=0$ или $x^2+2x+1=2a(x-1)$, откуда $a=\dfrac{x^2+2x+1}{2(x-1)}=\dfrac{(x+1)^2}{2(x-1)}$. Построим график функции $a(x)$ в системе координат $xOa$.

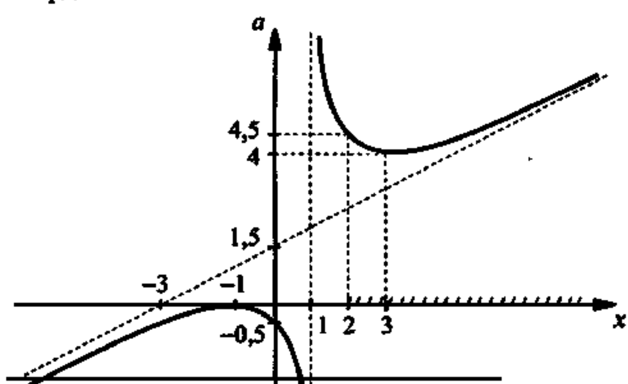



График пересекает ось $Oa$ в точке $a=0{,}5$ и касается оси $Ox$ в точке $x=-1$.

Найдем производную функции $a'=\dfrac{2(x+1)(x-1)-(x+1)^2}{2(x-1)^2}=$

$=\dfrac{(x+1)(x-3)}{2(x-1)^2}$. Критические точки функции $x=-1$ и $x=3$. В точке $x=-1$ функция имеет максимум $a_{max}=0$ и в точке $x=3$ – минимум $a_{min}=4$.

Очевидно, что график имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x=1$. В дроби $a=\dfrac{x^2+2x+1}{2(x-1)}$ делением уголком выделим целую часть: $a=\dfrac{x+3}{2}+\dfrac{2}{x-1}$. Это означает, что график имеет наклонную асимптоту с уравнением $a=\dfrac{x+3}{2}$. После проведенного исследования легко построить график функции.

Найдем значение функции $a(x)$ на границе $x=2$ промежутка $[2;+\infty)$: $a(2)=\dfrac{(2+1)^2}{2(2-1)}=\dfrac{9}{2}=4,5$. Построим прямую $a=a_0$. Абсциссы точек пересечения построенного графика функции $a(x)$ и прямой $a=a_0$ являются решениями данного уравнения. Видно, что при $a\in(-\infty;-0,5)$ один корень отрицательный, другой – положительный. При $a\in(-0,5;0]$ оба корня отрицательные. Причем для $a=0$ два корня одинаковые и равны $(-1)$. При $a\in(0;4)$ уравнение корней не имеет. Для $a\in[4;+\infty)$ оба корня уравнения положительные. Причем при $a=4$ корни совпадают и равны 3. Для $a\in[4;+\infty)$ один из корней $x_1\in(1;3]$, а другой – $x_2\in[3;+\infty)$. Наконец, ответим на вопрос задачи: при $a\in[4;4,5]$ корень $x\in[2;3]$.

Итак, при $a\in[4;4,5]$ оба корня данного уравнения не меньше 2.

Заметим, что второй способ решения более **информативен**: он позволяет не только ответить на вопрос задачи, но и обсудить расположение корней уравнения.

Разумеется, рассмотренные приемы используются и при **решении уравнений и неравенств другого вида**, а также при **исследовании этих решений**.

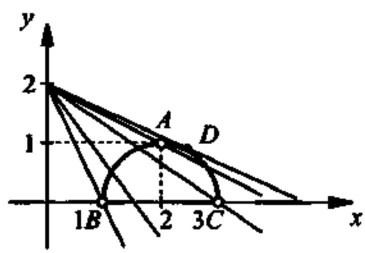
***Пример 9***

При каких значениях параметра $a$ уравнение $\log_{ax+2}(4x-3-x^2)=1$ имеет единственное решение?

ОДЗ уравнения задается условиями: $\begin{cases} ax+2>0, \\ ax+2\neq 1, \\ 4x-3-x^2>0. \end{cases}$ Данное уравнение равносильно квадратному уравнению $4x-3-x^2=ax+2$. Проще исследовать ограничения, связанные только с одной переменной. Для квадратного уравнения в силу равенства $4x-3-x^2=ax+2$ ограничения имеют более простой вид: $\begin{cases} 4x-3-x^2\neq 1, \\ 4x-3-x^2>0. \end{cases}$

Используем графический способ решения. В системе координат $xOy$ построим график функции $y_1=4x-3-x^2$. Сохраним часть параболы, для которой $y_1>0$, и исключим вершину параболы $A(2;\,1)$, для которой $y_1=1$.

Графиком функции $y_2=ax+2$ является прямая, проходящая через точку $(0;\,2)$. Наклон прямой определяется угловым коэффициентом $a$.




Из рисунка видно, что уравнение имеет единственное решение в трех случаях:

а) прямая $y_2$ пересекает ось абсцисс между точками $B$ и $C$;

б) прямая $y_2$ проходит через вершину параболы (точка $A$);

в) прямая $y_2$ касается параболы $y_1$ (точка $D$).

Обсудим эти случаи.

а) Так как прямая $y_2$ проходит через точку $B(1;\,0)$, то выполняется равенство: $0=a\cdot 1+2$, откуда $a=-2$. Аналогично для точки $C(3;\,0)$: $0=a\cdot 3+2$, тогда $a=-\frac{2}{3}$. Итак, при $a\in\left(-2;\,-\frac{2}{3}\right]$ уравнение имеет единственный корень.

б) Подобно случаю а для точки $A(2;\,1)$ получаем: $1=a\cdot 2+2$, откуда $a=-\frac{1}{2}$. При $a=-\frac{1}{2}$ уравнение также имеет единственное решение.

в) Касание параболы и прямой означает, что уравнение $4x-3-x^2=ax+2$ или $0=x^2+(a-4)x+5$ имеет единственное решение. Тогда его дискриминант $D=(a-4)^2-20$ равен нулю. Решим это уравнение: $(a-4)^2-20=0$ или $a-4=\pm2\sqrt{5}$, откуда $a=4\pm2\sqrt{5}$. Из рисунка видно, что в этом случае значение $a=4-2\sqrt{5}$ (второй корень посторонний). Таким образом, при $a=4-2\sqrt{5}$ уравнение имеет единственный корень.

Итак, при $a\in\left(-2;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\cup\{4-2\sqrt{5}\}$ данное уравнение имеет единственное решение.

Заметим, что **разделение переменных** на неизвестные и параметры достаточно **условно**. Поэтому при решении некоторых задач удобно **изменить смысл** неизвестных и параметров.

***Пример 10***

Решим кубическое уравнение $x^3-x^2-x(a^2-3a+6)-2a^2+6a=0$.

Данное уравнение является кубическим относительно переменной $x$, но квадратным – относительно переменной $a$. Будем считать переменную $a$ неизвестной, а переменную $x$ – параметром. Запишем уравнение в виде $x^3-x^2-a^2x+3ax-6x-2a^2+6a=0$ или $0=(x+2)a^2-$ $-3(x+2)a-x(x^2-x-6)$. Последнее слагаемое разложим на множители. Получаем уравнение: $0=(x+2)a^2-3(x+2)a-x(x-3)(x+2)$ или $0=(x+2)[a^2-3a-(x^2-3x)]$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем:

а) линейное уравнение: $x+2=0$, откуда $x_1=-2$;

б) квадратное уравнение: $a^2-3a-(x^2-3x)=0$ или $0=x^2-3x-(a^2-3a)$, корни которого $x_{2,3}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+4(a^2-3a)}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{4a^2-12a+9}}{2}=$ $=\dfrac{3\pm(2a-3)}{2}$, т. е. $x_2=a$ и $x_3=-a+3$.

Итак, данное кубическое уравнение имеет три корня: $x_1=-2$, $x_2=a$, $x_3=-a+3$.

Еще раз подчеркнем, что тема «Задачи с параметрами» достаточно сложная. Поэтому такие задачи целесообразно рассматривать **постепенно** с 7 класса, начиная с линейных уравнений и неравенств и продолжая такое изучение **в рамках каждой темы**. При этом необходимо **развивать и закреплять** навыки решения подобных задач.

**IV. Задание на уроках**

§ 60, № 1; 3(а); 4 (б); 5 (а); 6; 9 (б); 10; 12 (а); 13 (б); 14; 16 (а); 17 (б); 18 (а); 19 (б).

**V. Задание на дом**

§ 60, № 2; 3 (б); 4 (а); 5 (б); 7; 9 (а); 11; 12 (б); 13 (а); 15; 16 (б); 17 (а); 18 (б); 19 (а).

**VI. Подведение итогов уроков**

## Уроки 79–80. Контрольная работа по теме «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств»

***Цель***: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Варианты контрольной работы**

**Вариант 1**

1. Решите уравнение:

а) $(4+x)^2=(4+x)(17x+2)$;

б) $7\cos(2x+1)=2$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x^2+xy=40,\\ 3x-y=10;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{5x-y}=25,\\ 2^{2x-y}=\dfrac{1}{32}.\end{cases}$

3. Решите систему неравенств: $\begin{cases}x^2-3x-18\le 0,\\ \dfrac{x}{1-x}<0.\end{cases}$

4. При каких значениях параметра $a$ уравнение $\dfrac{x+1}{2x+a}=1$ не имеет решений?

**Вариант 2**

1. Решите уравнение:

а) $(2+x)^2=(2+x)(55x-4)$;

б) $6\sin(3x-5)=1$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}3x^2+xy=35,\\2x-y=30;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-y}=27,\\5^{3x-y}=\dfrac{1}{25}.\end{cases}$

3. Решите систему неравенств: $\begin{cases}x^2-x-72\le 0,\\\dfrac{x}{3-x}<0.\end{cases}$

4. При каких значениях параметра $a$ уравнение $\dfrac{x+2}{2x-a}=1$ не имеет решений?

**Вариант 3**

1. Решите уравнение:

а) $6|x+2|=5|x|$;

б) $3\cdot 2^{x+3}-2^{x+4}=4$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{2y}{x}-\dfrac{1}{xy}=9,\\\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=18;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=5,\\x-3y=-20.\end{cases}$

3. Решите неравенство: $\sqrt{3x^2-2x-1}\ge -1$.

4. Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень.

**Вариант 4**

1. Решите уравнение:

а) $9|x+2|=8|x|$;

б) $3^{x+1}+2\cdot 3^{x+2}=21$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=8, \\ \dfrac{6y}{x}-\dfrac{1}{xy}=20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y=3, \\ x-y=-6. \end{cases}$

3. Решите неравенство: $\sqrt{5x^2+4x-1}\ge -1$.

4. Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнения $x^2+4x-3a+7=0$ и $x^2+7x-5a+15=0$ имеют хотя бы один общий корень.

**Вариант 5**

1. Решите уравнение:

а) $|x^2+5x-14|=-5x-x^2+14$;

б) $(2x-1)\sqrt{-x-3}=2x-1$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{y^2+x}=\dfrac{1}{3}, \\ x^2-2y^4=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_x y+2\log_y x=2, \\ 5\sqrt{x}-\sqrt{y}=4. \end{cases}$

3. Решите неравенство: $\log_2 x\le \dfrac{2}{\log_2 x-1}$.

4. При каких значениях параметра $a$ уравнение $-2\sin^2 x=(a^2+5a+2)\sin x$ имеет ровно четыре корня на отрезке $[0;\ 2\pi]$?

**Вариант 6**

1. Решите уравнение:

а) $|x^2-2x-15|=2x-x^2+15$;

б) $(x-2)\sqrt{-x-1}=x-2$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{y^2-x}=\dfrac{1}{2}, \\ 2y^4-x^2=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \dfrac{5}{2}, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2. \end{cases}$

3. Решите неравенство: $\log_2 x \geq \dfrac{2}{\log_2 x + 1}$.

4. При каких значениях параметра $a$ уравнение $-20\sin^2 x = (a^2 + 13a + 20)\sin x$ имеет ровно четыре корня на отрезке $[0; 2\pi]$?

## Урок 81. Итоги контрольной работы

***Цели***: сообщить результаты работы; рассмотреть наиболее типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

### Ход урока

**I. Сообщение темы и целей урока**

**II. Итоги контрольной работы**

**III. Ответы и решения**

***Ответы***

**Вариант 1**

1. а) $x_1 = -4$, $x_2 = \dfrac{1}{8}$; б) $x = 0,5\left(\pm\arccos\dfrac{2}{7} - 1 + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

2. а) (4; 2), (–2; –16); б) (1; 7).

3. $[-3; 0) \cup (1; 6]$.

4. $a = 2$.

**Вариант 2**

1. а) $x_1 = -2$, $x_2 = \dfrac{1}{9}$; б) $x = \dfrac{1}{3}\left((-1)^n \arcsin\dfrac{1}{6} + 5 + \pi n\right)$, где $n \in Z$.

2. а) (–1; –32), (7; –14); б) (1; 5).

3. $[-8; 0) \cup (3; 9]$.

4. $a = -4$.

**Вариант 3**

1. а) $x_1 = -12$, $x_2 = -\dfrac{12}{11}$; б) $x = -1$.

2. а) $\left(\frac{1}{9}; 1\right)$, $\left(-\frac{1}{9}; -1\right)$; б) $(4; 8)$, $\left(-24; -\frac{4}{3}\right)$.

3. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$.

4. $a = 3$, $a = -\frac{33}{4}$.

**Вариант 4**

1. а) $x_1 = -18$, $x_2 = -\frac{18}{17}$; б) $x = 0$.

2. а) $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -1\right)$; б) $(3; 9)$, $(-9; -3)$.

3. $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

4. $a = 1$, $a = \frac{31}{4}$.

***Решения***

**Вариант 5**

1. а) Запишем уравнение в виде $\left|x^2 + 5x - 14\right| = -(x^2 + 5x - 14)$. Учтем определение модуля $|a| = -a$, если $a \le 0$. Тогда данное уравнение равносильно квадратному неравенству $x^2 + 5x - 14 \le 0$. Его решение: $x \in [-7; 2]$.

*Ответ*: $[-7; 2]$.

б) Перенесем все члены уравнения в левую часть, учтем его ОДЗ ($x \le -3$) и разложим эту часть на множители: $(2x - 1)(\sqrt{-x-3} - 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а другие имеют смысл. Получаем два случая:

а) $2x - 1 = 0$. Корень этого линейного уравнения $x = \frac{1}{2}$ не входит в ОДЗ (посторонний корень);

б) $\sqrt{-x-3} - 1 = 0$ или $-x - 3 = 1$, откуда $x = -4$.

*Ответ*: $x = -4$.

2. а) Систему уравнений запишем в виде $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^2 - 2y^4 = 2. \end{cases}$ Для решения используем способ подстановки. Из первого уравнения вы-

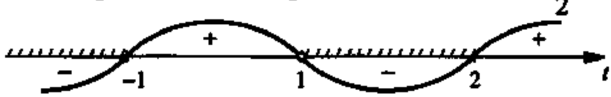
разим $x = 3 - y^2$ и подставим во второе: $(3-y^2)^2 - 2y^4 = 2$ или $0 = y^4 + 6y^2 - 7$. Корни этого биквадратного уравнения: $y = \pm 1$ (тогда $x = 2$). Итак, система уравнений имеет два решения: (2; 1), (2; –1).

*Ответ*: (2; 1), (2; –1).

б) В первом уравнении системы перейдем к одному основанию логарифмов: $\frac{1}{2}\log_x y + \frac{2}{\log_x y} = 2$. Введем новую переменную $t = \log_x y$ и получим уравнение: $\frac{t}{2} + \frac{2}{t} = 2$, или $t^2 - 4t + 4 = 0$, или $(t-2)^2 = 0$, которое имеет единственный корень $t = 2$. Вернемся к старой переменной $\log_x y = 2$, откуда $y = x^2$. Подставим эту величину во второе уравнение: $5\sqrt{x} - x = 4$ (учтено, что $x > 0$, $x \neq 1$). Введем новую переменную $z = \sqrt{x}$ и получим уравнение: $5z - z^2 = 4$ или $0 = z^2 - 5z + 4$. Корни этого уравнения: $z = 1$ (не подходит) и $z = 4$. Вернемся к старой переменной $\sqrt{x} = 4$ и найдем $x = 16$ и $y = 16^2 = 256$. Система имеет единственное решение (16; 256).

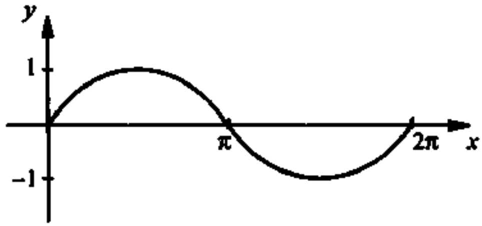
*Ответ*: (16; 256).

3. Введем новую переменную $t = \log_2 x$ и получим рациональное неравенство: $t \leq \frac{2}{t-1}$, или $t - \frac{2}{t-1} \leq 0$, или $\frac{t^2 - t - 2}{t-1} \leq 0$. Решая это неравенство методом интервалов, найдем: $t \leq -1$ и $1 < t \leq 2$. Вернемся к старой переменной и получим простейшие логарифмические неравенства: $\log_2 x \leq -1$ и $1 < \log_2 x \leq 2$, откуда $0 < x \leq \frac{1}{2}$ и $2 < x \leq 4$.




*Ответ*: $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (2; 4]$.

4. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.



Перенесем все члены уравнения в правую часть и разложим ее на множители: $0=\sin x\left(\sin x+\frac{a^2+5a+2}{2}\right)$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-\frac{a^2+5a+2}{2}.\end{array}\right.$ Первое уравнение на отрезке [0; 2π] уже имеет 3 корня. Значит, второе уравнение на данном отрезке должно иметь единственный корень. Это возможно, если правая часть уравнения будет равна ±1. Получаем совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l}-\frac{a^2+5a+2}{2}=1,\\ -\frac{a^2+5a+2}{2}=-1\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}a^2+5a+4=0,\\ a^2+5a=0,\end{array}\right.$ которая имеет четыре решения: $a=-1$, $a=-4$, $a=0$, $a=-5$.

*Ответ*: $a=-1$, $a=-4$, $a=0$, $a=-5$.

**Вариант 6**

1. а) Запишем уравнение в виде $|x^2-2x-15|=-(x^2-2x-15)$. Учтем определение модуля $|a|=-a$, если $a\le 0$. Тогда данное уравнение равносильно квадратному неравенству $x^2-5x-15\le 0$. Его решение: $x\in[-3;5]$.

*Ответ*: [–3; 5].

б) Перенесем все члены уравнения в левую часть, учтем его ОДЗ ($x\le -1$) и разложим эту часть на множители: $(x-2)(\sqrt{-x-1}-1)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а другие имеют смысл. Получаем два случая:

а) $x-2=0$. Корень этого линейного уравнения $x=2$ не входит в ОДЗ (посторонний корень);

б) $\sqrt{-x-1}-1=0$ или $-x-1=1$, откуда $x=-2$.

*Ответ*: $x=-2$.

2. а) Систему уравнений запишем в виде $\begin{cases}y^2-x=2,\\ 2y^4-x^2=1.\end{cases}$ Для решения используем способ подстановки. Из первого уравнения выразим $x=y^2-2$ и подставим во второе: $2y^4-(y^2-2)^2=1$ или $y^4+4y^2-5=0$. Корни этого биквадратного уравнения $y=\pm1$ (тогда $x=-1$). Итак, система уравнений имеет два решения: (–1; 1), (–1; –1).

*Ответ*: (–1; 1), (–1; –1).

б) В первом уравнении системы перейдем к одному основанию логарифмов: $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = \frac{5}{2}$. Введем новую переменную $t = \log_x y$ и получим уравнение: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ или $2t^2 - 5t + 2 = 0$, которое имеет корни $t_1 = 2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Вернемся к старой переменной: $\log_x y = 2$ (откуда $y = x^2$) и $\log_x y = \frac{1}{2}$ (тогда $y = \sqrt{x}$). Подставим эти величины во второе уравнение и рассмотрим два случая:

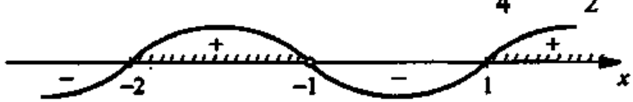
а) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2. \end{cases}$ Из второго уравнения имеем: $3\sqrt{x} - x = 2$ (учтено, что $x > 0$, $x \neq 1$). Введем новую переменную $z = \sqrt{x}$ и получим уравнение $3z - z^2 = 2$ или $0 = z^2 - 3z + 2$. Корни этого уравнения: $z = 1$ (не подходит) и $z = 2$. Вернемся к старой переменной $\sqrt{x} = 2$ и найдем: $x = 4$ и $y = 4^2 = 16$.

б) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2. \end{cases}$ Из второго уравнения имеем: $3\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 2$. Введем новую переменную $z = \sqrt[4]{x}$ и получим уравнение: $3z^2 - z = 2$ или $3z^2 - z - 2 = 0$. Корни этого уравнения: $z = 1$ (не подходит) и $z = -\frac{2}{3}$ (не подходит, т. к. $z \geq 0$).

Система имеет единственное решение (4; 16).

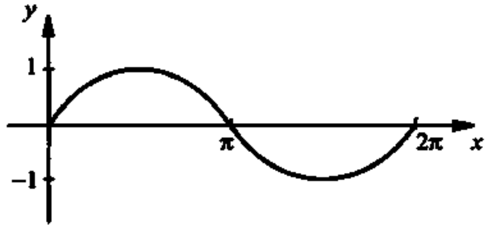
*Ответ*: (4; 16).

3. Введем новую переменную $t = \log_2 x$ и получим рациональное неравенство $t \geq \frac{2}{t+1}$, или $t - \frac{2}{t+1} \geq 0$, или $\frac{t^2 + t - 2}{t+1} \geq 0$. Решая это неравенство методом интервалов, найдем: $-2 \leq t < -1$ и $t \geq 1$. Вернемся к старой переменной и получим простейшие логарифмические неравенства: $-2 \leq \log_2 x < -1$ и $\log_2 x \geq 1$, откуда $\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$ и $x \geq 2$.




*Ответ*: $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$.

4. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.




Перенесем все члены уравнения в правую часть и разложим ее на множители: $0 = \sin x\left(\sin x + \dfrac{a^2 + 13a + 20}{20}\right)$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin x = -\dfrac{a^2+13a+20}{20}.\end{array}\right.$ Первое уравнение на отрезке $[0; 2\pi]$ уже имеет три корня. Значит, второе уравнение на данном отрезке должно иметь один корень. Это возможно, если правая часть уравнения будет равна $\pm 1$. Получаем совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l}-\dfrac{a^2+13a+20}{20} = 1,\\ -\dfrac{a^2+13a+20}{20} = -1\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}a^2+13a+40 = 0,\\ a^2+13a = 0,\end{array}\right.$

которая имеет четыре решения: $a = -8$, $a = -5$, $a = 0$, $a = -13$.

*Ответ*: $a = -8$, $a = -5$, $a = 0$, $a = -13$.

## Уроки 82–83. Зачетная работа по теме «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств»

***Цель***: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Варианты зачетной работы**

**Вариант 1**

**А**

1. Решите уравнение:

а) $(x^2+3x-23)^3=(4x-3)^3$;

б) $(4x^2-7x+3)\sqrt{5x+6}=0$;

в) $35^{1-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}\cdot 7^x$.

2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy^2=-75, \\ x^2y=45; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{y}=-1, \\ 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}=-7. \end{cases}$

3. Решите неравенство: $\frac{3x-2}{x+3}\geq 1-\frac{2}{5x}$.

4. Решите уравнение: $|5x-1|=|3x-7|$.

**В**

5. Дана функция $f(x)=4x^2-x$. Решите уравнение $f(f(x))=33$.

6. Решите уравнение: $\operatorname{tg}\left(5x-\frac{11\pi}{8}\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}-2x\right)$.

7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^{x+3}\cdot 2^{y-3}=3, \\ x-y=-5. \end{cases}$

8. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-1}{2x+3}\geq 0$.

**С**

9. Решите уравнение: $\frac{2}{\sin x}+13\cos x=-13\sin x$.

10. Найдите все пары $(x;\ y)$ положительных чисел $x$ и $y$, которые являются решениями системы уравнений: $\begin{cases} x^{3y-11}=16, \\ x^{y-3}=4. \end{cases}$

11. Найдите значения $a$, при которых произведение действительных корней уравнения $x^2+x\sqrt{14a-4a^2-10}-2a^2+8a-7=0$ принимает наименьшее и наибольшее значения. Найдите также эти значения.

**Вариант 2**

**А**

**1. Решите уравнение:**

а) $(x^2+8x+7)^3=(2x-1)^3$;

б) $(4x^2-x-5)\sqrt{2x+7}=0$;

в) $63^{3-x}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-x}\cdot 9^x$.

**2. Решите систему уравнений:**

а) $\begin{cases} xy^2=-36, \\ x^2y=-48; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=3, \\ 3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=-9. \end{cases}$

**3. Решите неравенство:** $\dfrac{5x-2}{x+3}\le 1-\dfrac{1}{4x}$.

**4. Решите уравнение:** $|3x-2|=|9x+10|$.

**В**

**5. Дана функция** $f(x)=5x^2-x$. **Решите уравнение** $f(f(x))=76$.

**6. Решите уравнение:** $\operatorname{tg}\left(9x-\dfrac{5\pi}{8}\right)=\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$.

**7. Решите систему уравнений:** $\begin{cases} 2^{x+1}\cdot 3^{y+2}=2, \\ x-y=2. \end{cases}$

**8. Решите неравенство:** $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2x+1}{3x-2}\ge 0$.

**С**

**9. Решите уравнение:** $49\cos x+11\sin x=\dfrac{4}{\cos x}$.

**10. Найдите все пары ($x$; $y$) положительных чисел $x$ и $y$, которые являются решениями системы уравнений:** $\begin{cases} x^{4y-1}=8, \\ x^{y+3}=16. \end{cases}$

**11. Найдите значения $a$, при которых произведение действительных корней уравнения $x^2+2x\sqrt{a^2+a-2}+2a^2-4=0$ принимает наименьшее и наибольшее значения. Найдите также эти значения.**

**III. Ответы и решения**

**Вариант 1**

1. а) $x_1 = -4, x_2 = 5$; б) $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{3}{4},\ x_3 = -\frac{6}{5}$; в) $x = \frac{1}{2}$.

2. а) $(-3; 5)$; б) $(-8; 1)$.

3. $(-\infty; -3)\cup(0; 0{,}3]\cup[2; +\infty)$.

4. $x_1 = -3, x_2 = 1$.

5. $x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{3}{4}$.

6. $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$.

7. $(-2; 3)$.

8. $\left(\frac{1}{3}; 4\right]$.

9. ОДЗ уравнения задается условием $\sin x \neq 0$. Запишем уравнение в виде: $2 + 13\sin x\cos x = -13\sin^2 x$, или $2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 13\sin x\cos x + 13\sin^2 x = 0$, или $2\cos^2 x + 13\sin x\cos x + 15\sin^2 x = 0$. Такое уравнение является однородным. Поэтому разделим все члены уравнения на $\sin^2 x$ и получим: $2\operatorname{ctg} x + 13\operatorname{ctg} x + 15 = 0$. Решения уравнения: $\operatorname{ctg} x = -5$ (тогда $x = \operatorname{arcctg}(-5) + \pi n,\ n \in Z$) и $\operatorname{ctg} x = -\frac{3}{2}$ (откуда $x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi n$).

*Ответ*: $x = \operatorname{arcctg}(-5) + \pi n,\ x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z$.

10. Прологарифмируем каждое уравнение по основанию 2 и запишем систему в виде $\begin{cases}(3y-11)\log_2 x = 4,\\ (y-3)\log_2 x = 2.\end{cases}$ Разделим первое уравнение на второе: $\frac{3y-11}{y-3} = 2$ или $3y - 11 = 2y - 6$, откуда $y = 5$. Подставим эту величину, например, во второе уравнение: $2\log_2 x = 2$, тогда $\log_2 x = 1$ и $x = 2$. Система имеет единственное решение $(2; 5)$.

*Ответ*: $(2; 5)$.

11. ОДЗ уравнения задается неравенством $14a - 4a^2 - 10 \geq 0$ или $2a^2 - 7a + 5 \leq 0$, откуда $a \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$. Так как данное квадратное уравнение

имеет корни, то его дискриминант $D = 14a - 4a^2 - 10 - 4(-2a^2 + 8a - 7) =$ $= 4a^2 - 18a + 18 \geq 0$. Решение этого неравенства $a \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

С учетом ОДЗ находим диапазон изменения параметра $a \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

По теореме Виета произведение корней данного квадратного уравнения $y = -2a^2 + 8a - 7$. Функция $y(a)$ имеет максимум при $a = 2$. На отрезке $a \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ функция $y(a)$ возрастает. Поэтому при $a = 1$ функция принимает наименьшее значение $\min\limits_{\left[1; \frac{3}{2}\right]} y(a) = -2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 7 = -1$,

при $a = \frac{3}{2}$ – наибольшее значение $\max\limits_{\left[1; \frac{3}{2}\right]} y(a) = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 8 \cdot \frac{3}{2} - 7 = 0,5$.

*Ответ*: наименьшее значение (–1) при $a = 1$ и наибольшее значение 0,5 при $a = 1,5$.

**Вариант 2**

1. а) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{4}$; $x_3 = -\frac{7}{2}$; в) $x = \frac{3}{2}$.

2. а) (–4; –3); б) (–1; 27).

3. $(-3; 0) \cup \left[\frac{3}{16}; 1\right]$.

4. $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

5. $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{4}{5}$.

6. $x = \frac{3\pi}{56} + \frac{\pi}{7}n$, $n \in Z$.

7. (0; –2).

8. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [3; +\infty)$.

9. ОДЗ уравнения задается условием $\cos x \neq 0$. Запишем уравнение в виде $49\cos^2 x + 11\sin x\cos x = 4$, или $0 = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x -$ $-11\sin x\cos x - 49\cos^2 x$, или $0 = 4\sin^2 x - 11\sin x\cos x - 45\cos^2 x$. Такое уравнение является однородным. Поэтому разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $0 = 4\text{tg}^2 x - 11\text{tg}\, x - 45$. Решения

уравнения: $\operatorname{tg} x = 5$ (тогда $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in Z$) и $\operatorname{tg} x = -\frac{9}{4}$ (откуда $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{9}{4}\right) + \pi n$).

*Ответ*: $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg}\frac{9}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

10. Прологарифмируем каждое уравнение по основанию 2 и запишем систему в виде $\begin{cases}(4y-1)\log_2 x = 3,\\ (y+3)\log_2 x = 4.\end{cases}$ Разделим первое уравнение на второе: $\frac{4y-1}{y+3} = \frac{3}{4}$ или $16y - 4 = 3y + 9$, откуда $y = 1$. Подставим эту величину, например, во второе уравнение: $4\log_2 x = 4$, тогда $\log_2 x = 1$ и $x = 2$. Система имеет единственное решение (2; 1).

*Ответ*: (2; 1).

11. ОДЗ уравнения задается неравенством $a^2 + a - 2 \geq 0$, откуда $a \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. Так как данное квадратное уравнение имеет корни, то его дискриминант $D = a^2 + a - 2 - (2a^2 - 4) = -a^2 + a + 2 \geq 0$. Решение этого неравенства $a \in [-1; 2]$. С учетом ОДЗ находим диапазон изменения параметра $a \in [1; 2]$. По теореме Виета произведение корней данного квадратного уравнения $y = 2a^2 - 4$. Функция $y(a)$ имеет минимум при $a = 0$. На отрезке $a \in [1; 2]$ функция $y(a)$ возрастает. Поэтому при $a = 1$ функция принимает наименьшее значение $\min\limits_{[1;2]} y(a) = 2 \cdot 1^2 - 4 = -2$, при $a = 2$ – наибольшее значение $\max\limits_{[1;2]} y(a) = 2 \cdot 2^2 - 4 = 4$.

*Ответ*: наименьшее значение (–2) при $a = 1$ и наибольшее значение 4 при $a = 2$.

## Уроки 84–85. Итоговая контрольная работа

***Цель***: проконтролировать знания по всем темам курса по однотипным вариантам.

### Ход уроков

**I. Сообщение темы и цели уроков**

**II. Характеристика контрольной работы**

В заключение обучения проводится итоговая контрольная работа. Предлагаются два одинаковых по сложности варианта. На наш взгляд, использование при подведении итогов вариантов разной сложности нецелесообразно и некорректно. В одинаковых условиях проще и этичнее сопоставить результаты и успехи учащихся. При окончательном подведении итогов, разумеется, необходимо учитывать все результаты обучения (оценки за контрольные мероприятия, сложность решаемых задач, активность на уроках и т. д.).

**III. Критерии оценки работы**

Вариант традиционно содержит шесть задач примерно одинаковой сложности. Поэтому рекомендуем использовать те же критерии при оценке, что и для вариантов 1 и 2 контрольных работ при текущем обучении. Оценка «5» ставится за пять решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. Одна задача является резервной и дает некоторую свободу выбора.

**Вариант 1**

1. Решите уравнение $2\cos^2(\pi+x)-2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+1=0$.

2. Решите уравнение $\log_2(1-x)-1=\log_2 5+\log_2(x+2)$.

3. Найдите область определения функции $y=3\log_4(9-x^2)+\sqrt{3\sin x}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5}(1-3x)}{3\cdot 2^{4x}+1}\geq 0$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{3}{(x-2)^2}$, $y=x$, $x=4$.

6. Катер прошел по течению реки расстояние от пункта $A$ до пункта $B$ за 5 ч, а от $B$ до $A$ – за 7 ч. За сколько часов проплывет от $A$ до $B$ плот?

**Вариант 2**

1. Решите уравнение $6\cos^2(\pi-x)-5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+2=0$.

2. Решите уравнение $\log_3(2-x)-1=\log_3 5+\log_3(x+4)$.

3. Найдите область определения функции $y=2\log_3(4-x^2)+\sqrt{5\cos x}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,2}(1-5x)}{5\cdot 3^{2x}+2}\geq 0$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{(x-1)^2}$, $y=x$, $x=3$.

6. Катер прошел по течению реки расстояние от пункта $A$ до пункта $B$ за 7 ч, а от $B$ до $A$ – за 9 ч. За сколько часов проплывет от $A$ до $B$ плот?

## Урок 86. Подведение итогов обучения

***Цель***: ознакомить с результатами обучения.

### Ход урока

**I. Сообщение темы и цели урока**

**II. Результаты итоговой контрольной работы**

1. Оглашение оценок за контрольную работу.
2. Основные ошибки в задачах.
3. Разбор задач контрольной работы (вывешен на стенде).

**III. Итоги учебного года**

1. **Сообщение годовых оценок по алгебре** (похвалить отлично и хорошо успевающих школьников, обратить внимание на слабые места менее успевающих учеников и дать рекомендации по их преодолению).
2. **Особенности прошедшего учебного года** (отметить темы, усвоенные хорошо, и темы, вызвавшие трудности; обратить внимание на необходимость дальнейшего развития навыков построения графиков функций, решения уравнений и неравенств и их систем).
3. **Поздравить с окончанием учебного года и школы.**

**IV. Сориентировать учащихся на ЕГЭ по математике**

# Литература


1. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятность. 5–9 кл. – М.: Дрофа, 2004.

2. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. – М.: Наука, 1990.

3. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ для 10–11 классов для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 1995.

4. Глазков Ю.А., Корешкова Т.А., Мирошин В.В. и др. Математика. ЕГЭ: Методическое пособие для подготовки. – М.: Экзамен, 2007.

5. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1982.

6. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В. и др. Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983.

7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Астрель, 2002.

8. Дорофеев Г.В., Седова Е.А., Шестаков С.А. ЕГЭ: суперрепетитор. – М.: Эксмо, 2007.

9. Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы/Под ред. М.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1992.

10. Зеленский С.А., Василенко О.Н. Сборник задач вступительных экзаменов по математике. – М.: НТЦ «Университетский», 2001.

11. Иванов А.С., Майоров Ю.К., Рурукин А.Н. Сборник задач по тригонометрии и началам анализа. – М.: МИФИ, 1991.

12. Ивлев Б.М., Саакян С.М., Шварцбурд С.И. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса. – М.: Просвещение, 2005.

13. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10–11 классов. – М.: Просвещение, 2001.

14. Кочагин В.В., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др. Математика: реальные варианты: ЕГЭ 2007–2008. – М.: Астрель, 2007.

15. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. – М.: Просвещение, 1990.

16. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1994.

17. Мирошин Н.В., Баскаков А.В., Михайлов П.А. и др. Математика: Сборник задач с решениями для поступающих в вузы. – М.: Астрель, 2002.

18. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: Учебник. – М.: Мнемозина, 2009.

19. Мордкович А.Г., Денищева Л.О., Корешкова Т.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10–11 классы: Задачник. – М.: Мнемозина, 2009.

20. Мочалов В.В., Сильвестров В.В. Уравнения и неравенства с параметрами. – Чебоксары: Изд-во. Чувашского университета, 2000.

21. Нечаев М.П. Уроки по курсу «Алгебра–11». – М.: 5 за знания, 2007.

22. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс. – М.: ВАКО, 2008.

23. Рурукин А.Н. Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. Выпускной, вступительный, ЕГЭ на 5+. – М.: ВАКО, 2006.

24. Рурукин А.Н. ЕГЭ. Математика. Пособие для подготовки. Подробный разбор заданий 2002–2004. – М.: ВАКО, 2004.

25. Севрюков П.Ф. Школа решения задач с параметрами. – М.: Илекса, 2007.

26. Шарыгин И.Ф. Решение задач для 10–11 классов. – М.: Просвещение, 1994.

27. Шестаков С.А., Высоцкий И.Р., Звавич Л.И. и др. Алгебра и начала анализа: Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы. – М.: МИОО, МЦНМО, 2002.

28. Шестаков С.А. Экзаменационные работы для проведения итоговой аттестации по алгебре и началам анализа за курс средней школы. – М.: МИОО, 2004.

# Оглавление

*Учебно-методическое издание*

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

**Рурукин** Александр Николаевич
**Масленникова** Ирина Александровна
**Мишина** Татьяна Георгиевна

# ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

к УМК А.Г. Мордковича и др. (*М.: Мнемозина*)

## 11 класс

Выпускающий редактор *Екатерина Белова*
Дизайн обложки *Анны Новиковой*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 18.11.2010.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 15,9. Тираж 7000 экз. Заказ № 6573.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати – ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: pto@gipp.kirov.ru